1. Der VFL Wolfsburg hat Kevin de Bruyne für 75 Millionen € an Manchester City verkauft. Wolfsburg hat ihn vor 2 Jahren für 25 Millionen € gekauft.
   a) Berechnen Sie den Zinssatz, den man erhalten muss, damit aus 25 Millionen € in 2 Jahren 75 Millionen € werden.
   b) Stellen Sie sich vor, der Wert Kevin de Bruynes wächst weiterhin auf die gleiche Weise. Wie hoch wäre die Ablösesumme in weiteren 2 Jahren? Unterstellen Sie
      i. lineares Wachstum,
      ii. exponentielles Wachstum.
2. Ein Bauer düngt sein Feld mit einem Mineraldünger mit 130 kg pro ha. Die Menge des Düngers reduziert sich jeweils um 10% pro Woche. Wenn nur noch 50% des ursprünglichen Bestandes vorhanden sind, muss der Bauer erneut düngen. Wann muss er wieder düngen?
3. Herr Meier hat 15.000 € auf dem Konto. Er hat 5% Zinsen pro Jahr bekommen. Wie hoch war der Betrag, den er vor 7 Jahren angelegt hat?
4. Ein Fußballstadion, dass 50.000 Zuschauern Platz bietet, füllt sich mit 500 Zuschauern pro Minute. Es sind bereits 15.000 Zuschauer im Stadion.
   a) Wie lange dauert es, bis das Stadion gefüllt ist.
   b) Vor welcher Zeit hat die Füllung des Stadions begonnen?
5. An die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit 12 cm Seitenlänge werden weitere gleichseitige Dreiecke gezeichnet. Die Seitenlänge wird dabei halbiert. Die Figur wird auf der 2. Stufe entsprechend fortgesetzt: An jede freie Ecke wird wieder ein gleichseitiges Dreieck mit halbierter Seitenlänge gezeichnet. Die Abbildung 1 ist eine grobe Skizze des Sachverhalts.
   a) Wie groß ist die Seitenlänge eines Dreiecks der 5. Stufe.
   b) Wie viele Dreiecke gibt es auf der 5. Stufe?
   c) Wie viele Dreiecke gibt es bis zu 5. Stufe (inklusive der 5. Stufe)?
6. Herr Meier legt 12.500 € für 6% Zinsen an. Wie viel Geld hat er nach 10 Jahren auf dem Konto?
7. Eine Kerze ist 25 cm hoch. Pro Stunde brennt sie 4 cm ab.
   a) Wir hoch ist die Kerze in 3 Stunden noch?
   b) Wann ist sie abgebrannt?
   c) Sie hat schon 2,5 Stunden gebrannt. Wie hoch war sie ursprünglich?
8. Eine Alge ist 1,3 Meter lang. Sie wächst alle 5 Tage um 10%
   a) Wie lang wird sie in 10 Tagen sein?
   b) Wie lang wird sie 48 Tagen sein?
   c) Wann wird sie ihre Länge verdoppelt haben?
9. Die Vorfahren von Herrn Meier haben am 1. Januar nach der Gründung der USA (also am 1.1.1776) 10 $ angelegt.

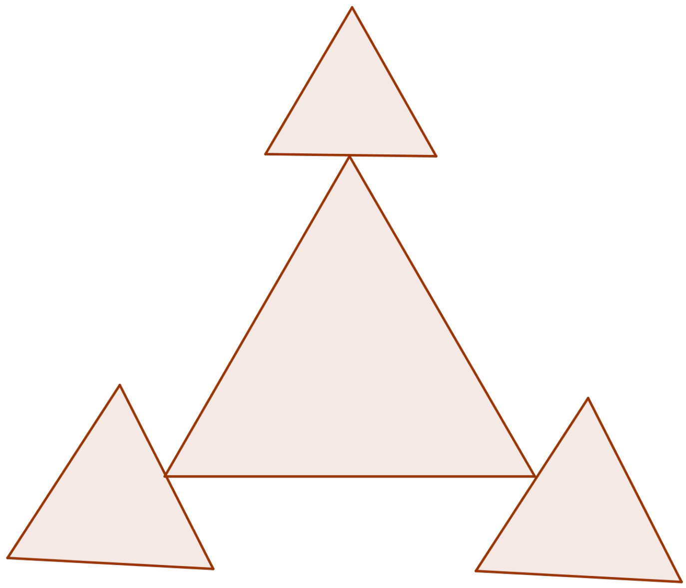

Abbildung 1: Dreiecke

a) Auf welchen Betrag ist dieses Geld bis zum Ende des Jahres 2014 angewachsen, wenn es mit 2% verzinst wird.
b) Verdoppelt sich das Endkapital, wenn statt 10 $ 20 $ angelegt worden sind?
c) Verdoppelt sich das Kapital, wenn statt 2% Zinsen 4% erzielt werden?

1. Fußball
   a) Es handelt sich um Zinseszinsen. Es ist

   $$\begin{aligned} & 25.000.000\text{ €} * q^2 = & 75.000.000\text{ €} \quad & | : 25.000.000\text{ €} \\ \Longleftrightarrow \quad & q^2 = & 3 \quad & |\sqrt{} \\ \Longleftrightarrow \quad & q = & 1,7321 & \end{aligned}$$

   Da $p = q - 1$ ist, folgt $p = 1,7321 - 1 = 0,7321 = 73,21\%$. Die Geldanlage wurde mit 73,21% verzinst.

   b) Weiteres Wachstum.
      i. Bei linearem Wachstum würde der Wert in 2 Jahren erneut um 50.000.000 € steigen und dann bei 125.000.000 € liegen.
      ii. Bei exponentiellem Wachstum würden wir auf $K_4 = 25.000.000\text{ €} * 1,7321^4 = 225.0255.622\text{ €}$ kommen, also rund 225 Millionen €.
2. Es liegt exponentielles Wachstum vor. Er muss mindestens 5 Wochen warten, da wir bei 10% Abnahme pro Woche mindestens 5 Wochen warten müssen, bis 50% weg. sind. Es wird sogar mehr sein, da die absolute Abnahme immer kleiner wird. Versuchen wir $n = 7$: $B_7 = 130$ mg $* 0,9^7 = 62,18$ mg. Nach 7 Wochen ist die Hälfte bereits unterschritten. Er muss also im Lauf der 7. Woche nachdüngen.
3. Zinseszinsrechnung. Es ist K_0 gesucht. Aus $15.000\text{ €} = K_0 * 1,05^7$ folgt nach Division durch $1,05^7$: $K_0 = \frac{15.000\text{ €}}{1,05^7} = 10.660,22\text{ €}$.
4. Fußballstadion: Lineares Wachstum $B_n = 15.000 + 500 * n$
   a) Entweder lösen wir die Gleichung $B_n = 15.000 + 500 * n = 50.000$. Oder wir sehen, dass noch 35.000 Zuschauer ins Stadion passen. Das dauert dann $\frac{35.000}{500} = 70$ Minuten.
   b) Damit 15.000 Zuschauer ins Stadion kommen, benötigen wir $\frac{15.000}{500} = 30$ Minuten.
5. Dreiecke. Bei der Länge der Seiten ist es exponentielles Wachstum, bei der Anzahl der Dreiecke lineares Wachstum.
   a) Die Wachstumsfunktion für die Länge der Seite ist $B_n = 12$ cm $* 0,5^{n-1}$. Es ist als Exponent $n - 1$, da bei $12 * 0,5^n$ eine Seitenlänge auf der 1. Stufe 6 cm lang wäre. Auf der 5. Stufe hat eine Dreiecksseite dann die Länge $B_5 = 12$ cm $* 0,5^4 = 0,75$ cm. Sie können auch von 12 (1. Stufe) auch 4-mal halbieren, um die 5. Stufe zu erhalten: 12 cm - 6 cm - 3 cm -1,5 cm - 0,75 cm.
   b) Die Anzahl der Dreiecke wächst exponentiell. Die Anzahl der Dreiecke verdreifacht sich pro Stufe. Da es auf der 1. Stufe gibt nur 1 Dreieck gibt, ist die Wachstumsfunktion $B_n = 1 * 3^{n-1}$ und auf der 5. Stufe gibt es $B_5 = 1 * 3^4 = 81$ Dreiecke.

c) Auf der 1. Stufe gibt es ein Dreieck, auf jeder weiteren Stufe 3 mal mehr, also gibt es auf der 2. Stufe 3 Dreiecke, dann 9, dann 27 und schließlich 81 (so hätte sich die vorige Aufgabe auch lösen lassen). Diese Zahlen müssen wir addieren: Es gibt insgesamt 1+3+9+27+81=121 Dreiecke.

6. $K_{10} = 12.500$ € $* 1,06^{120} = 22.385,60$ €.

7. Kerze. Lineares Wachstum: $B_n = 25$ cm $+ 4$ cm $* n$

   a) Es ist $B_3 = 25$ cm $- 4$ cm $* 3 = 13$ cm. Die Kerze ist 13 cm hoch.

   b) Es ist zu lösen 25 cm $- 4$ cm $* 3 = 0$ cm Umstellen ergibt $n = \frac{25}{4} = 6,25$. Es dauert 6 Stunden und 15 Minuten.

   c) In 2,5 Stunden brennt die Kerze $2,5$ cm $* 4 = 10$ cm. Damit war sie anfangs 35 cm hoch. Wir können auch $-2,5$ in die Gleichung für die Länge der Kerze einsetzen. Dann erhalten wir das selbe Ergebnis:
   25 cm $- 4$ cm $* (-2,5) = 35$ cm. n ist in diesem Fall negativ, da wir einen Zeitpunkt in der Vergangenheit betrachten wollen.

8. Exponentielles Wachstum: $B_n = 1,3$ m $* 1,1^n$.

   a) 10 Tage bedeutet, dass $n = 2$ ist. $B_2 = 1,3$ m $* 1,1^2 = 1,573$ m.

   b) 48 Tage bedeutet, dass $n = \frac{48}{5} = 9,6$ ist: $B_{9,6} = 1,3$ m $* 1,1^{9,6} = 3,25$ m.

   c) Bei einem Wachstum von 10% sollte es nach der Faustformel ungefähr $\frac{70}{10} = 7$ Wachstumsperioden dauern, bis eine Verdoppelung eingetreten ist. Testen wir: $B_7 = 1,3$ m $* 1,1^7 = 2,53$ m. Das ist noch etwas zu wenig, aber es ist $B_8 = 1,3$ m $* 1,1^8 = 2,79$ m, also mehr doppelt so viel wie am Anfang. Es dauert zwischen 35 und 40 Tagen.

9. Zinsrechnung $K_n = K_0 * 1,02^n$

   a) Von Anfang 1777 bis Ende 2014 sind es 237 Jahre, also
   $K_{237} = 10$ \$ $* 1,02^{237} = 1.092,04$ \$.

   b) Ja: $K_{237} = 20$ \$ $* 1,02^{237} = 2.184,09$ \$.

   c) Nein, es wird deutlich mehr; der Zinseszinseffekt schlägt zu:
   $K_{237} = 10$ \$ $* 1,04^{237} = 108.868,29$ \$. Es verhundertfacht sich dadurch fast.