

## Wachstum 4

1. Entscheiden Sie, ob es sich um exponentielles oder lineares Wachstum bzw. Abnehmen/Schrumpfen handelt. Geben Sie die jeweilige Wachstumsfunktion an:
  - a) Joes Taschengeld von 15 € nimmt mit jedem Lebensjahr um 5 € zu.
  - b) Eine Bakterienkultur von 2.000 Bakterien verdoppelt ihren Bestand alle 3 Tage.
  - c) Uran 235 hat eine Halbwertszeit 703 Millionen Jahren. Es sind 30 Gramm vorhanden
  - d) Zu Unterrichtsbeginn kommen alle 5 Minuten zwei Schüler in die Klasse. Zu Stundenbeginn sind 5 Schüler in der Klasse.
  - e) Ein Taxifahrer verlangt für jeden gefahrenen Kilometer 2,10 €. Die Grundgebühr beträgt 2 €.
  - f) Tropfsteine wachsen pro Jahr um 1,3 mm. Der Tropfstein hat schon eine Länge von 10 cm.
  - g) Eine Hefekultur verdoppelt ihr Volumen alle 3 Tage bei 45° Celsius. Anfangs ist das Volumen bei 2 cm<sup>3</sup>
  - h) Das Wasser fließt mit 200 m<sup>3</sup> pro Minute aus einem See, der 10.000 m<sup>3</sup> Wasser enthält.
2. Herr Müller legt 10.000 € für 1,5% an.
  - a) Wie viel Geld hat er nach 10 Jahren?
  - b) Wie viele Zinsen hat er erhalten?
  - c) Wann verdoppelt sich das Kapital?
3. Ein Gerücht verbreitet sich an einer Schule. Ein Schüler schafft es jeweils, das Gerücht innerhalb von 5 Minuten an einen anderen weiterzugeben. Aus dem anfangs einen Schüler werden damit zwei, die es jeweils wieder einem anderen Schüler weiter erzählen. Dieser Vorgang setzt sich immer weiter fort.
  - a) Wie hoch ist der Wachstumsfaktor der Verbreitung der Gerüchte pro Minute?
  - b) Wie viele Schüler haben nach 20 Minuten von dem Gerücht gehört, wenn ein Schüler das Gerücht in Umlauf setzt?
  - c) Wann haben alle 230 Schüler von diesem Gerücht gehört?
  - d) Geben Sie Gründe an, warum es unwahrscheinlich ist, dass sich das Gerücht nach diesem Muster ausbreitet?
4. Ein Handytarif hat folgende Bedingungen: Pro Monat ist eine Grundgebühr von 7,95 € zu zahlen. Für jede Gesprächsminute werden 0,10 € fällig.
  - a) Stellen Sie eine Funktion der Gesprächskosten pro Monat in Abhängigkeit von den Gesprächsminuten auf.
  - b) Wie teuer ist es, das Handy für 95 Minuten Gesprächszeit im Monat zu benutzen?

## Wachstum 4

- c) Wie viele Minuten können Sie für 25 € telefonieren?
5. Herr Meier hat 10.000 € angelegt und nach 7 Jahren 12.500 € zurück bekommen. Wie hoch war der Zinssatz?
6. Das Wachstum einer Tanne wird mit der Funktion  $B_n = 1,35 \text{ Meter} + 0,22 \text{ Meter}$  beschrieben.
- Wofür stehen die 1,35 Meter und die 0,22 Meter?
  - Wie hoch ist die Tanne nach 20 Jahren?
  - Wann erreicht sie eine Höhe von 20 Metern?
  - Wie groß war die Tanne vor 2 Jahren?
  - Halten Sie diese Wachstumsfunktion einer Tanne für sinnvoll? Begründen Sie Ihre Antwort.
7. Eine Kerze ist 20 cm hoch. Wird sie angezündet, schrumpft Sie jede Stunde um 3,5 cm.
- Wie hoch ist die Kerze nach 3 Stunden?
  - Wann ist die Kerze ganz abgebrannt?

## Wachstum 4

1.
  - a) Joes Taschengeld von 15 € nimmt mit jedem Lebensjahr um 5 € zu. Linear:  
 $B_n = 15 + 5 * n$ .
  - b) Eine Bakterienkultur von 2.000 Bakterien verdoppelt ihren Bestand alle 3 Tage. Exponentiell:  $B_n = 2.000 * 2^n$ .
  - c) Uran 235 hat eine Halbwertszeit 703 Millionen Jahren. Es sind 30 Gramm vorhanden. Exponentiell:  $B_n = 30 * \frac{1}{2}^n$ .
  - d) Zu Unterrichtsbeginn kommen alle 5 Minuten zwei Schüler in die Klasse. Zu Stundenbeginn sind 5 Schüler in der Klasse. Linear:  $B_n = 5 + 2n$ .
  - e) Ein Taxifahrer verlangt für jeden gefahrenen Kilometer 2,10 €. Die Grundgebühr beträgt 2 €. Linear:  $B_n = 2 + 2,1 * n$ .
  - f) Tropfsteine wachsen pro Jahr um 1,3 mm. Der Tropfstein hat schon eine Länge von 10 cm. Linear:  $B_n = 100 + 1,3 * n$  (Umrechnung Zentimeter in Millimeter!!)
  - g) Eine Hefekultur verdoppelt ihr Volumen alle 3 Tage bei 45° Celsius. Anfangs ist das Volumen bei 2 cm<sup>3</sup>. Exponentiell:  $B_n = 2 * 2^n$ .
  - h) Das Wasser fließt mit 200 m<sup>3</sup> pro Minute aus einem See, der 10.000 m<sup>3</sup> Wasser enthält. Linear:  $B_n = 10.000 - 200 * n$ .
2. Kapital: Die Wachstumsfunktion ist  $K_n = 10.000 € * 1,015^n$ .
  - a) Nach 10 Jahren:  $K_{10} = 10.000 € * 1,015^{10} = 11.605,41 €$ .
  - b) Die Zinsen sind die Differenz zwischen End- und Anfangskapital:  
 $Z = K_{10} - K_0 = 11.605,41 € - 10.000 € = 1.605,41 €$
  - c) Nach der Faustformel  $n * p = 70$  ergibt sich  $n = \frac{70}{1,5} = 46, \bar{6}$ . Wir prüfen das Kapital nach 46 Jahren:  $K_{46} = 10.000 € * 1,015^{46} = 19.835,26 €$  (noch keine Verdoppelung) und nach 47 Jahren:  
 $K_{47} = 10.000 € * 1,015^{47} = 20.132,79 €$ . Die Verdoppelung ist erfolgt.
3. Gerüchte
  - a) Jeder Schüler gibt das Gerücht an einen anderen weiter. Die Anzahl der Schüler, die von dem Gerücht wissen, verdoppelt sich alle 5 Minuten. Die Wachstumsrate ist  $q = 2$ , wenn wir die Periodenlänge mit 5 Minuten ansetzen. Sie ist  $2^{\frac{1}{5}} = 1,1487$ , was einem Wachstum von 14,87% pro Minute entspricht ( $q = 1 + p \Leftrightarrow p = q - 1$ , hier also  $p = 1,1487 - 1 = 0,1487 = 14,87\%$ ).
  - b) Nach 20 Minuten sind vier 5-Minuten-Zyklen vergangen. Die Anzahl der Schüler hat sich viermal verdoppelt: 1 - 2 - 4 - 8 - 16. Die Funktion, die dazu gehört ist  $B_n = 2^n$ , also  $B_4 = 2^4 = 16$ . Eine Bemerkung zum Exponenten: Der 1. Schüler ist  $n = 0$ , danach kommt die 1. Verdoppelung. Daher ist der Exponent  $n$ .
  - c) Das Wachstum ist wie folgt: 1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 - 128 - 256. Zwischen der 7. und 8. Verdoppelung habe alle 230 Schüler von dem Gerücht gehört. Es dauert zwischen 35 und 40 Minuten, bis alle Schüler davon gehört haben.

## Wachstum 4

### d) Kritische Annahmen in der Geschichte:

- Jeder Schüler erzählt es weiter; es ist also keinem zu uninteressant zum Weitererzählen.
- Jeder Schüler findet einen anderen Schüler, der das Gerücht noch nicht kannte - dies wird um so schwerer, je weiter der Prozess fortgeschritten ist.
- Es sind alle Schüler an dem Tag in der Schule.

### 4. Telefonkosten

a) Es handelt sich um lineares Wachstum (fester Betrag pro Minute).

$$B_n = 7,95 \text{ €} + 0,10 \text{ €} * n.$$

b)  $B_{95} = 7,95 \text{ €} + 0,10 \text{ €} * 95 = 17,45 \text{ €}$ .

c) Wir lösen die Gleichung

$$\begin{aligned} 7,95 \text{ €} + 0,10 \text{ €} * n &= 25 \text{ €} & | - 7,95 \text{ €} \\ \iff 0,10 \text{ €} * n &= 17,05 \text{ €} & | : 0,10 \text{ €} \\ \iff n &= 170,5 \end{aligned}$$

Wir können 170 Minuten telefonieren.

### 5. Zu lösen ist die Gleichung:

$$\begin{aligned} 10.000 \text{ €} * q^7 &= 12.500 \text{ €} & | : 10.000 \text{ €} \\ \iff q^7 &= 1,25 & | \sqrt[7]{\phantom{x}} \\ \iff q &= 1,0324 \end{aligned}$$

Aus  $p = q - 1$  folgt  $p = 0,03239 = 3,24\%$ .

### 6. Tanne

a) Die 1,35 Meter sind der Anfangsbestand, die 0,22 Meter das Wachstum pro Jahr.

b) In 20 Jahren ist die Tanne

$$B_{20} = 1,35 \text{ Meter} + 0,22 \text{ Meter} * 20 = 5,75 \text{ Meter hoch.}$$

c) Um zu errechnen, wann die Tanne 20 Meter hoch sein wird, rechnen wir

$$\begin{aligned} 1,35 \text{ Meter} + 0,22 \text{ Meter} * n &= 20 \text{ m} & | - 1,35 \text{ Meter} \\ \iff 0,22 \text{ Meter} * n &= 18,65 \text{ Meter} & | : 0,22 \text{ Meter} \\ \iff n &= 84,7\overline{72} \end{aligned}$$

Es dauert etwas mehr als 84 Jahre, bis die Tanne 20 Meter groß ist.

d) „Vor zwei Jahren“ bedeutet, dass  $n$  negativ ist. Daher:

$$B_{-2} = 1,35 \text{ Meter} + 0,22 \text{ Meter} * (-2) = 0,91 \text{ Meter.}$$

e) Der Baum hat nur eine eingeschränkte Lebensdauer, daher sollte  $n$  nicht unendlich groß werden. Das Wachstum eines Baumes verläuft nicht linear, sondern am Anfang schneller und zum Ende hin langsamer. Eine lineare Funktion ist daher nicht angebracht.

#### Wachstum 4

7. Das Schrumpfen der Kerze folgt einer linearen Funktion:

$$B_n = 20 \text{ cm} - 3,5 \text{ cm} * n.$$

a) Nach 3 Stunden:  $B_3 = 20 \text{ cm} - 3 * 3,5 \text{ cm} = 9,5 \text{ cm}$ .

b) Die Kerze soll eine Resthöhe von 0 cm haben:

$$\begin{aligned} 20 \text{ cm} - 3,5 \text{ cm} * n &= 0 \text{ cm} && | - 20 \text{ cm} \\ \Leftrightarrow -3,5 \text{ cm} * n &= -20 \text{ cm} && | : (-3,5 \text{ cm}) \\ \Leftrightarrow n &= 5,71428\overline{5} \end{aligned}$$

Die Kerze ist ungefähr nach 5 Stunden, 42 Minuten und 51 Sekunden abgebrannt.