

### Wachstum 3

1. Der normale Luftdruck beträgt auf Meereshöhe 1.013 Hektopascal (hPa). Er nimmt mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel ab und zwar um rund 3% pro Kilometer.
  - a) Wie hoch ist der Luftdruck auf dem Mount Everest (Höhe 8.848 Meter über dem Meeresspiegel)?
  - b) Wie hoch ist der Luftdruck am Toten Meer in Israel (428 Meter **unter** dem Meeresspiegel)?
2. Herr Meier will ein Haus bauen. Dafür leiht er sich von seiner Bank 120.000 €. Er muss das Geld mit 7,5% verzinsen.
  - a) Wie viel Geld muss er nach 8 Jahren zurück zahlen?
  - b) Wie viel Zinsen zahlt er?
3. In Aachen kostet eine Taxifahrt am Tag einen Grundpreis von 3,90 €. Der Preis pro Kilometer beträgt 1,90 €. In Darmstadt zahlt man einen Grundpreis von 2 € und hat einen Kilometerpreis von ebenfalls 2 €.
  - a) Wie viel müssen Sie für eine Fahrt von 10 km in Aachen bezahlen?
  - b) Wie viel müssen Sie für eine Fahrt von 10 km in Darmstadt bezahlen?
  - c) Wie weit kommen Sie mit 20 € in Aachen?
  - d) Wie weit kommen Sie mit 20 € in Darmstadt?
  - e) Bei welcher Strecke müssen Sie in beiden Städten die gleiche Summe zahlen?
4. Uran 238 hat eine Halbwertszeit von 4.468.000.000 Jahren. Das bedeutet, dass nach 4.468.000.000 Jahren noch immer die Hälfte des anfangs vorhandenen Materials vorhanden ist. Die Lebenserwartung eines Menschen ist ungefähr 80 Jahre. Wie viel von dem Anfangsmaterial (Nehmen Sie 100% an) ist nach 80 Jahren noch vorhanden?
5. Eine Blattlausart verdreifacht ihren Bestand einmal pro Woche. Als Frau Meier für das neu erworbene Haus einen Rosenstock kauft befinden sich darauf 2 Blattläuse.
  - a) Stellen Sie eine Tabelle des Wachstums für die ersten vier Wochen auf
  - b) Tragen Sie diese Werte in eine Wertetabelle ein und zeichnen Sie eine zugehörige Kurve.
  - c) Wie lautet die Funktion, die das Wachstum beschreibt?
  - d) Wann sind 100 Läuse auf dem Rosenstock?
  - e) Wie viele Blattläuse befinden sich nach einem Jahr auf dem Rosenstock?
  - f) Warum ist es unrealistisch, die Anzahl der Blattläuse nach einem Jahr mit diesem Modell zu berechnen?
6. Früher bekamen Kinder zu ihrer Geburt oft 5 DM von einer Bank oder Sparkasse geschenkt.
  - a) Auf welchen Betrag wächst dieses Geschenk bei 4% Verzinsung bis zum 80. Lebensjahr an?

### Wachstum 3

- b) Das Auflösen eines Kontos kostete häufig 10 DM Gebühr. Wann sind bei 4% Verzinsung 10 DM auf dem Konto?
7. Welche Anlage verspricht die höhere Verzinsung?
- Angebot A: Aus 20.000 € werden in 3 Jahren 24.500 €
  - Angebot B: aus 50.000 € werden in 4 Jahren 63.123 €
8. Der Holzbestand eines Waldes wird auf ungefähr 100.000 Festmeter<sup>1</sup>
- a) Es wird angenommen, dass der Bestand mit 3,5% im Jahr wächst. Wie groß wird der Bestand in 10 Jahren sein?
- b) Durch die Klimaerwärmung wächst der Wald weniger, nämlich nur noch mit 2,5% pro Jahr. Wie groß wird der Bestand in 10 Jahren nun sein?
- c) Ein Festmeter Holz kostet etwa 90 €. Wie hoch ist der Verlust, der durch das geringere Wachstum ausgelöst wird?
- d) Der Besitzer des Waldes hat im Laufe des Jahres immer 3.000 m<sup>3</sup> entnommen, um Einkommen zu haben. Aus Vereinfachungsgründen nehmen wir an, dass das Holz komplett am Jahresende nach dem Wachstum entnommen wird. Stellen Sie eine Tabelle auf, der Sie die Entwicklung des Holzbestandes für die nächsten 5 Jahre entnehmen können. Das Wachstum sei weiterhin bei 2,5% pro Jahr. Die Tabelle hat folgendes Aussehen (alle Werte in m<sup>3</sup>):
- | Jahr | Anfangsbestand | Zuwachs | Abholzung | Endbestand |
|------|----------------|---------|-----------|------------|
|      |                |         |           |            |
- e) Wie viel Holz darf der Besitzer entnehmen, damit der Holzbestand nicht kleiner wird? Wie viel Einkommen kann er damit pro Jahr erzielen?

<sup>1</sup>Ein Festmeter ein Raumaß. Es entspricht einem Kubikmeter.

## Wachstum 3

1. Luftdruck: Es ist eine exponentielle Wachstumsfunktion  $B_n = 1.013 \text{ hPa} * 0,97^n$ .

a)  $B_{8,848} = 1.013 \text{ hPa} * 0,97^{8,848} = 773,69 \text{ hPa}$ .

b) Nun ist der Exponent negativ; der Luftdruck wird größer:

$$B_{-0,428} = 1.013 \text{ hPa} * 0,97^{-0,428} = 1026,29 \text{ hPa}$$

2. Kredit

a)  $K_8 = 120.000 \text{ €} * 1,075^8 = 214.017,34 \text{ €}$ .

b) Die Zinsen sind die Differenz zwischen End- und Anfangskapital:

$$Z = K_8 - K_0 = 214.017,34 \text{ €} - 120.000 \text{ €} = 94.017,34 \text{ €}$$

3. Taxifahrten: Es sind lineare Funktionen. Für Aachen:  $B_n^A = 3,90 \text{ €} + 1,90 \text{ €} * n$ ,

für Darmstadt  $B_n^D = 2 \text{ €} + 2 \text{ €} * n$ .

a)  $B_{10}^A = 3,90 \text{ €} + 1,90 \text{ €} * 10 = 22,90 \text{ €}$ .

b)  $B_{10}^D = 2 \text{ €} + 2 \text{ €} * 10 = 22 \text{ €}$ .

c) Zu lösen ist:

$$\begin{aligned} 3,90 \text{ €} + 1,90 \text{ €} * n &= 20 && | - 3,90 \text{ €} \\ \Leftrightarrow 1,90 \text{ €} * n &= 16,10 \text{ €} && | : 1,90 \text{ €} \\ \Leftrightarrow n &= 8,47 \end{aligned}$$

Sie können knapp 8,5 Kilometer fahren.

d) Zu lösen ist

$$\begin{aligned} 2 \text{ €} + 2 \text{ €} * n &= 20 && | - 2 \text{ €} \\ \Leftrightarrow 2 \text{ €} * n &= 18 \text{ €} && | : 2 \text{ €} \\ \Leftrightarrow n &= 9 \end{aligned}$$

Sie können 9 Kilometer fahren.

e) Zu lösen ist

$$\begin{aligned} 2 \text{ €} + 2 \text{ €} * n &= 3,90 \text{ €} + 1,90 \text{ €} * n && | - 2 \text{ €} | - 1,90 \text{ €} * n \\ \Leftrightarrow 0,10 \text{ €} * n &= 1,90 \text{ €} && | : 0,10 \text{ €} \\ \Leftrightarrow n &= 19 \end{aligned}$$

Nach 19 Kilometern sind beide Tarife gleich teuer.

4.  $B_{\frac{100}{4.468.000.000}} = 100 * \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{80}{4.468.000.000}} = 99,99999877$

5. Blattläuse

a) Tabelle:

Woche	Anzahl
0	2
1	6
2	18
3	54
4	162

## Wachstum 3

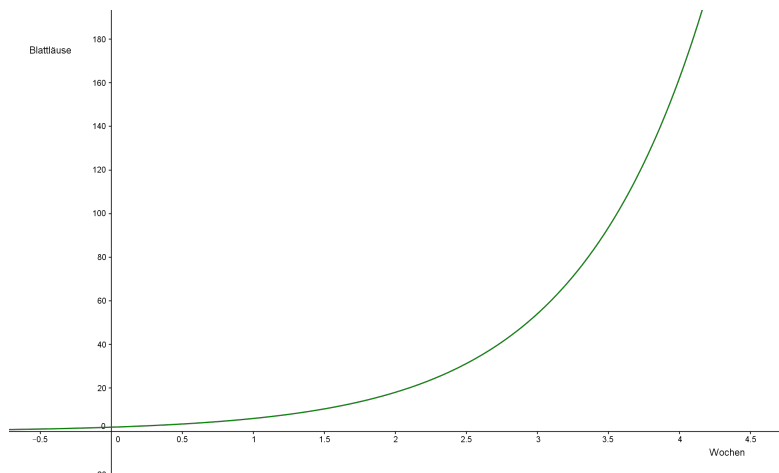


Abbildung 1: Die Entwicklung der Blattläuse-Population

b) Abbildung 1

c) Die Wachstumsfunktion ist exponentiell:  $B_n = 2 * 3^n$ . Zu lösen ist:

$$\begin{aligned} 2 * 3^n &= 100 \quad | : 2 \\ \iff 3^n &= 50 \end{aligned}$$

Nun müssen wir ausprobieren, wann 50 erreicht wird, wenn 3 immer wieder mit sich selbst multipliziert wird. Es ist  $3^4 = 81$ , also werden in der vierten Woche mehr als 100 Läuse auf dem Rosenstock sein.

d)  $B_{52} = 2 * 3^{52} = 1,2922 * 10^{25}$  Blattläuse.

e) Es ist unwahrscheinlich, weil das Wetter nicht immer so gut ist (Frost im Winter). Zudem ist es fraglich, ob die Blattläuse so viel Platz haben, dass alle unterkommen.

### 6. Geldgeschenk

a)  $K_{80} = 5 \text{ €} * 10,4^{80} = 115,25 \text{ €}$ .

b) Das Geld muss sich gerade verdoppeln. Nach der Faustregel wird das ungefähr  $\frac{70}{4} = 17,5$  Jahre dauern. Es sind  $K_{17} = 5 \text{ €} * 10,4^{17} = 9,74 \text{ €}$  und  $K_{18} = 5 \text{ €} * 10,4^{18} = 10,13 \text{ €}$ . Wenn die Zinsen zum Ende des Jahres ausgezahlt werden, dauert es 18 Jahre.

### 7. Wir berechnen die beiden Zinssätze:

•

$$\begin{aligned} 24.500 \text{ €} &= 20.000 \text{ €} * q^3 \quad | : 20.000 \text{ €} \\ \iff q^3 &= 1,225 \quad | \sqrt[3]{\phantom{x}} \\ \iff q &= 1,0700 \end{aligned}$$

Aus  $p = q - 1$  folgt, dass der Zinssatz 7% ist.

### Wachstum 3

•

$$\begin{aligned} 63.123 \text{ €} &= 50.000 \text{ €} * q^4 \quad | : 50.000 \text{ €} \\ \Leftrightarrow q^4 &= 1,26246 \quad | \sqrt[4]{\phantom{x}} \\ \Leftrightarrow q &= 1,0600 \end{aligned}$$

Somit ist der Zinssatz hier 6%. Das erste Angebot ist damit besser.

#### 8. Holzbestand: Exponentielles Wachstum

- a)  $B_{10} = 100.000 \text{ m}^3 * 1,035^{10} = 141.059,88 \text{ m}^3$ .
- b)  $B_{10} = 100.000 \text{ m}^3 * 1,025^{10} = 128.008,45 \text{ m}^3$ .
- c) Die Differenz der Bestände ist  $141.059,88 \text{ m}^3 - 128.008,45 \text{ m}^3 = 13.051,43 \text{ m}^3$ . Dieses multiplizieren wir mit dem Preis von 90 € pro  $\text{m}^3$  und erhalten 1.174.628,70 €.
- d) Die Entwicklung:

Jahr	Anfangsbestand	Zuwachs	Abholzung	Endbestand
0	100.000	2.500	3.000	99.500
1	99.500	2.487,50	3.000	98.987,50
2	98.987,50	2.474,69	3.000	98.462,19
3	98.462,19	2.461,55	3.000	97.923,74
4	97.923,74	2.448,09	3.000	97.371,83
5	97.371,83	2.434,30	3.000	96.805,68

Der Waldbestand nimmt immer weiter ab. Die Abnahme wird sogar stärker, weil der Zuwachs immer kleiner wird.

- e) Er darf gerade den Zuwachs im ersten Jahr entnehmen:  $2.500 \text{ m}^3$ : Das Einkommen ist dann  $2.500 * 90 = 225.00 \text{ €}$ .