1 Arten von Wachstum

Wachstum bedeutet, dass eine Größe über die Zeit zu- oder abnimmt. Dabei kann diese Zu- oder Abnahme regelmäßigen Gesetzen folgen oder unregelmäßig sein. Uns interessieren die regelmäßigen Wachstumsprozesse. Wir unterscheiden dabei

- lineares Wachstum
- exponentielles Wachstum
- quadratisches Wachstum
- zyklisches Wachstum

Zyklisches Wachstum ist gut daran zu erkennen, dass die betrachtete Größe im Zeitablauf größer und wieder kleiner wird. Ein gutes Beispiel ist hierfür die Wasserhöhe eines Meeres im Tagesablauf. Die Wasserhöhe schwankt um einen „Mittelwert“ und ist mal größer und mal kleiner als dieser Mittelwert. Ähnliches gilt für Temperaturen im Tages- oder Jahresablauf. Dieses zyklische Wachstum wird häufig durch eine Sinusfunktion modelliert.

Lineares Wachstum erkennen wir daran, dass die Zu- oder Abnahme einer Größe immer mit demselben absoluten Wert vor sich geht. So könnte beispielsweise ein Baum jedes Jahr um 20 cm wachsen. Lineares Wachstum wird durch eine lineare Funktion des Typs $y = mx + b$ und den dazu gehörigen Graphen - eine Gerade - dargestellt.

Exponentielles Wachstum ist dadurch gekennzeichnet, dass die Zu- oder Abnahme der Größe immer mit demselben relativen Wert - beispielsweise mit demselben Prozentsatz - passiert. Beispiele hierfür sind die Verzinsung von Kapital (Wachstum) oder der Verfall von radioaktivem Material (Verfall).

Quadratisches Wachstum wird mit Hilfe von quadratischen Funktionen dargestellt.

2 Zyklisches Wachstum

Das zyklische Wachstum wird mit Hilfe trigonometrischer Funktionen - meist der Sinusfunktion - modelliert. Die allgemeine Form der Sinusfunktion ist

$$f(x) = a * sin(bx + c) + d.$$

Normalerweise geht die Sinusfunktion durch den Ursprung des Koordinatensystems, hat einen Maximalwert von 1, einen Minimalwert von -1 und wiederholt sich alle 360° bzw. 2 π. Die Sinusfunktion sieht wie eine große Welle aus. Daher ist sie gut geeignet, zyklische Wachstumsvorgänge zu beschreiben. Bei zyklischen Wachstumsvorgängen wiederholen sich bestimmte Werte immer wieder, wie beispielsweise der Wasserstand bei Ebbe und Flut oder Temperaturen im Jahresablauf. Allerdings sind diese Wachstumsvorgänge nicht so, dass sie immer durch den Ursprung gehen und sich nach genau 2π Zeiteinheiten wiederholen oder zwischen 1 und -1 schwanken. Um die Sinusfunktion anzupassen, sind die Parameter in der obigen Gleichung dazu.

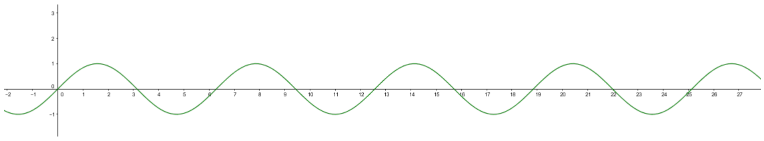

Abbildung 1: Die Sinusfunktion

- a verändert die Ausschläge der Sinusfunktion nach oben und unten. ist $a = 2$, dann schwankt die Sinusfunktion nicht mehr zwischen 1 und -1, sondern zwischen 2 und -2. Die maximalen bzw. minimalen Ausschläge nennt man die Amplitude der Sinusfunktion.
- d verschiebt die Sinusfunktion als ganzes nach oben. $d = 15$ bedeutet, dass die Sinusfunktion nicht mehr um die x-Achse schwankt, sonder um 15 Einheiten nach oben rutscht. Dies macht beispielsweise Sinn, wenn man Wasserstand an einer Meeresküste bestimmen will. Wenn der Mittelwert z. B. bei 8 Metern liegt und immer um 3 Meter nach oben und unten schwankt, dann ist $d = 8$ und $a = 3$.
- Eine Änderung von b bewirkt,dass die Sinusfunktion nach rechts und links auseinander gezogen $b > 1$ oder zusammen geschoben $0 < b < 1$ wird. Die Zeit, die die Sinusfunktion benötigt, um wieder in die Ausgangslage zu kommen, nennt man die Periodenlänge p. Es gilt $p = \frac{2\pi}{b}$. Bei unserem Beispiel wiederholt sich der Zustand des Meeres alle 6 Stunden, also ist $p = 6$ und damit $b = \frac{2\pi}{6}$.
- c bewirkt eine Rechts- oder Linksverschiebung der Sinusfunktion. Dabei wird bei $c > 0$ nach links verschoben und bei $< c < 0$ nach rechts. Es wird dabei um $\frac{c}{b}$ verschoben. Sollte das Normalwasser in unserem Beispiel also nicht um 0 Uhr, sondern um 3 Uhr sein, müsste $-3 = \frac{c}{b} = \frac{c}{2\pi}$ sein, also $c = -6\pi$.

Die Sinusfunktion - hier damit die Funktion des Wasserstandes - sieht wie folgt aus $f(x) = 3 * \sin(\frac{\pi}{3}x - \frac{6}{\pi} + 15)$.:

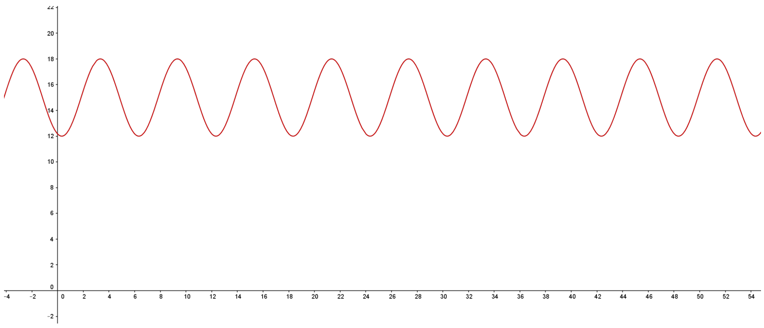

Abbildung 2: Wasserstand

3 Lineares Wachstum

Lineares Wachstum bedeutet, dass der Bestand B um immer genau die gleiche Menge zu- oder abnimmt. Stellen wir uns ein Wasserbecken vor, dass 10.000 Liter Wasser enthält; wenn jetzt jede Minute 50 Liter aus dem Becken abgelassen werden, haben wir lineares Wachstum - auch wenn es ein Prozess der Abnahme ist, lineare Abnahme wäre wohl angebrachter. Die Funktion, die angibt, wie viel Wasser nach x Minuten im Becken ist, ist $y = 10.000 - 50x$ - es handelt sich um eine lineare Funktion. Dabei darf y nie negativ werden, daher darf x nicht größer als 200 werden. Die allgemeine Form einer linearen Funktion ist $y = mx + b$. Dabei gibt b beim Wachstum den Anfangsbestand an und m die Änderung des Bestandes pro Zeiteinheit.

4 Exponentielles Wachstum

Bei Wachstums- bzw. Verfallsprozessen spielen oft die Verdoppelungszeit auf der einen Seite und die Halbwertszeit auf der anderen Seite eine Rolle. Bevor wir uns weiter mit diesen Begriffen beschäftigen, wollen wir zwei andere Begriffe einführen: Wachstumsrate und Wachstumsfaktor.

4.1 Wachstumsrate und Wachstumsfaktor

Die Wachstumsrate p ist die Größe, um die sich der Ausgangswert prozentual in einer Periode ändert. Der Wachstumsfaktor q ist die Größe, auf die sich die Ausgangsgröße innerhalb einer Periode prozentual ändert.

Diese beiden Begriffe wollen wir mit Hilfe der Zinsrechnung verdeutlichen. Nehmen wir an, wir haben 200 € Ausgangskapital und eine Verzinsung von 4%. Die Wachstumsrate ist daher $P = 4$. Dann ist die Wachstumsrate $4\% = 0,04$ - dies ist der prozentuale Wert, der zum Ausgangswert dazu kommt. Bei 4% Verzinsung wächst das Kapital von 200 € innerhalb eines Jahres auf 208 € - dies sind 104% des Ausgangswertes oder das 1,04-fache des Ausgangswertes. Der Wachstumsfaktor ist daher $q = 1,04$.

Allgemein gilt

$$q = 1 + \frac{p}{100} \text{ bzw.} \tag{1}$$

$$p = (q-1) * 100 \tag{2}$$

Dies gilt auch für Zerfallsprozesse. Dort ist p negativ, damit die Ausgangsgröße kleiner wird, muss etwas subtrahiert werden, und q ist kleiner als 1. q ist nie negativ. Wäre q negativ, würde eine positive Ausgangsmenge nach einer Periode zu einer negativen Menge führen.

Stellen wir uns einen Zerfallsprozess vor, bei dem der Ausgangswert immer im 10% schrumpft. p ist in diesem Beispiel -10 und q ist 0,9, weil nach einer Periode nur noch 90% des Ausgangswertes übrig sind.

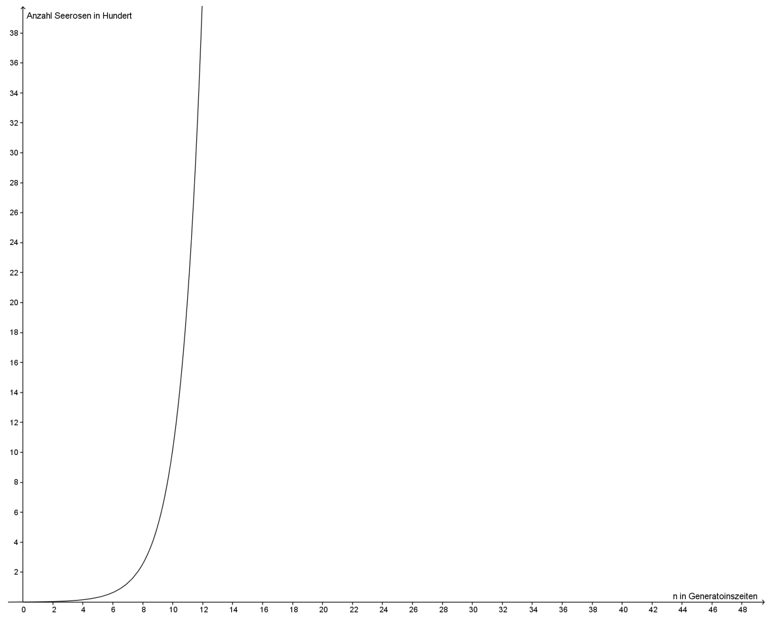

Abbildung 3: Exponentielles Wachstum

4.2 Wachstum mit Generationszeiten

Die Verdoppelungszeit die Zeit, die ein Wachstumsprozess benötigt, damit die Größe sich verdoppelt.

So könnte beispielsweise eine Seerosenart die von ihr bewachsene Fläche alle 5 Tage verdoppeln. Die Verdoppelungszeit wäre somit 5 Tage. In einer Tabelle sieht die Entwicklung dieser Seerosenpopulation wie folgt aus, wenn wir annehmen, dass es am Anfang eine Seerose gibt:

Tage	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Generationen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pflanzen	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Setzen wir diese Entwicklung in eine Grafik um, sieht sie so aus wie in Abbildung 3. Dabei ist zu beachten, dass die Anzahl der Seerosen in Hundert gemessen wird. Die 30 auf der y-Achse bedeutet, dass es sich um 3.000 Seerosen handelt.

Die Verdoppelungszeit nennt man oft auch Generationszeit. Diese Bezeichnung stammt aus der Forschung mit Tierpopulationen. Eine Verdoppelung der Anzahl Tiere bedeutete dort, dass eine weitere Generation an Kinder geboren worden war.

Allgemein hat eine Funktion, die exponentielles Wachstum abbildet, die Form[1]

$$B_n = B_0 * q^n \tag{3}$$

Dabei bedeuten die einzelnen Variablen folgendes:

- B ist der Bestand - in unserem Beispiel der Seerosen, wobei
- B_n der Bestand nach n Perioden ist, insbesondere ist
- B_0 der Anfangsbestand
- n ist die Anzahl der Perioden, die vergangen sind. n kann dabei beispielsweise in Tagen, Jahren oder Generationszeiten gemessen werden.
- q ist der Wachstumsfaktor.

Die Funktion, die die Anzahl der Seerosen nach einer bestimmten Anzahl n von Generationszeiten misst, ist

$$B_n = 1 * 2^n \tag{4}$$

Dabei sind in die allgemeine Form der Gleichung (3) die Werte eingesetzt worden, die wir dem Beispiel entnehmen können:

- Der Anfangswert B_0 ist 1. Der Wachstumsprozess beginnt mit einer Seerose.
- Der Wachstumsfaktor ist 2 - die Seerosenzahl verdoppelt sich alle 5 Tage.
- Die Zeit wird in 5-Tages-Zyklen gemessen, da dies die Generationszeit ist. das bedeutet, dass die Erhöhung von n um eine Einheit bedeutet, dass 5 Tage vergangen sind.

Wie stellen wir nun fest, wie viele Seerosen nach drei Wochen auf dem See sind. 21 ist nicht glatt durch 5 teilbar, deshalb können wir diesen Wert nicht direkt der obigen Tabelle entnehmen.

Wir haben zwei Möglichkeiten, die Anzahl festzustellen.

- Die eine ist die graphische Methode. Dazu rechnen wir aus, dass 21 Tage $\frac{21}{5} = 4,2$ Generationen sind. Diese $4,2$ suchen wir auf der x-Achse der Abbildung 3, gehen senkrecht nach oben, bis wir auf die Kurve treffen. Von dort gehen wir senkrecht nach links und lesen die zugehörige Anzahl Seerosen ab - dabei dürfen wir nicht vergessen, die ermittelte Zahl mit 100 zu multiplizieren, da die Anzahl Seerosen in Hundert angegeben ist. Diese Methode ist nicht sehr genau und trifft insbesondere dann auf Grenzen, wenn wir relativ lange Zeiträume betrachten wollen.
- Daher gibt es auch eine numerische Methode. Wir setzen die oben ermittelte Anzahl Generationszeiten (4,2) in die Formel zur Berechnung der Seerosen (4) ein und erhalten 18,4 als ungefähren Wert. Dies bedeutet, dass wir zu dem Zeitpunkt 1840 Seerosen haben.

Bezeichnen wir die Anzahl der vergangenen Tage mit x, gilt allgemein

$$B_x = B_0 * 2^{\frac{\text{x}}{\text{Generationszeit}}} \tag{5}$$

[1] Diese Funktion benutzen wir - nur mit anderen Buchstaben für die Variablen - bei der Zinseszinsrechnung.

Wenn wir feststellen wollen, mit welcher Rate die Seerosen pro Tag wachsen, setzen wir in die Formel (5) für x eine 1 ein und erhalten $2^{\frac{1}{5}} = 1,148698355$ als Ergebnis. Dies bedeutet, dass die Seerosen mit 14,8698355% pro Tage wachsen.[2]

Dieses Wachstum wird irgendwann auf Grenzen stoßen. Spätestens, wenn der ganze See von Seerosen bedeckt ist, wird das Wachstum beendet sein.

4.3 Zerfall mit Halbwertszeiten

Bei exponentiellem Zerfall spielt die Halbwertszeit eine große Rolle. Diese ist - beispielsweise bei radioaktiven Stoffen - die Zeit. die vergeht, bis nur die Hälfte des Stoffes vorhanden ist. Der Zerfall folgt dabei derselben Grundformel (3) wir das Wachstum, mit dem Unterschied, dass der Wachstumsfaktor q nun $\frac{1}{2}$ ist. Allgemein gilt: Ist q größer als 1, haben wir Wachstum, ist q kleiner als 1, haben wir Verfall. Erinnern wir uns daran, was der Wachstumsfaktor angibt: Er gibt an, wie viel nach einer Zeitperiode aus dem Anfangsbestand geworden ist. Bei Wachstum ist es mehr als der ursprüngliche Bestand, also mehr als 100%=1, bei Zerfall ist es weniger als der ursprüngliche Bestand, daher ein Wert kleiner als 1, aber immer noch größer als 0.

Nehmen wir als Beispiel 1 kg eines radioaktives Element, dessen Halbwertszeit 100 Jahre beträgt. Wir stellen eine Tabelle der Entwicklung der Masse des Elements auf

Jahre	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
Generationen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Masse in g	1000	500	250	125	62,5	31,25	15,625	7,8125	3,91	1,95

Die zugehörige Funktion, die die Masse des Elements nach n Halbwertszeiten angibt lautet

$$B_n = B_0 * 0,5^n \qquad (6)$$

und in diesem Fall

$$B_n = 1000 * 0,5^n,$$

wobei n in 100-Jahres-Schritten gemessen wird. Wenn wir wissen wollen, wie viel von dem Stoff noch nach 750 Jahren vorhanden ist, können wir einerseits versuchen, den Wert aus der Grafik 4 abzulesen oder wir verwenden eine Formel, die der Formel (5) sehr ähnlich ist, und setzen die entsprechenden Werte ein:

$$B_7, 5 = 1000 * 0,5^{\frac{750}{100}} \simeq 5,524.$$

Nach einem Jahr sind entsprechend noch $1000 * 0,5^{\frac{1}{100}} \simeq 993,0924$ g vorhanden. Dies bedeutet, dass die Menge des Materials auf 99,30924% gesunken ist. Der jährliche Verfall dieses Elements ist daher 0,69076% pro Jahr.

[2] Den Prozentsatz erhalten wir, indem wir von dem Ergebnis 1 subtrahieren und das Ergebnis mit 100 multiplizieren; s. Formel 2.

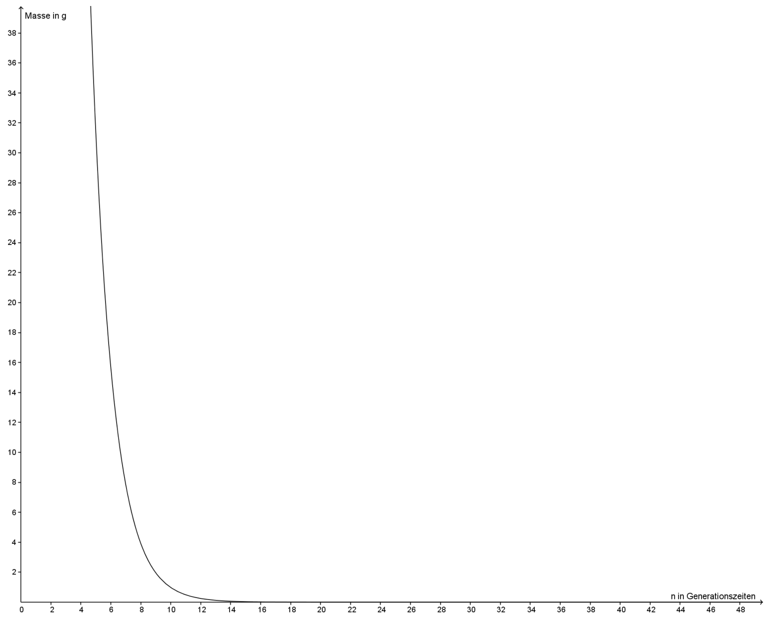

Abbildung 4: Radioaktiver Zerfall

Auch hier ergibt sich ein rechnerisches Problem. Aus der Logik des Zerfalls folgt, dass das radioaktive Material irgendwann verschwunden sein muss. Mit exponentiellem Wachstum kann man jedoch nie eine Menge von kleiner als Null erhalten. Die Funktion nähert sich immer mehr dem Wert Null an, erreicht ihn aber nie. Dies können wir auch der Abbildung 4 entnehmen.

4.4 Wachstum und Zerfall allgemein

Bisher haben wir Wachstumsprozesse betrachtet, bei denen die Verdoppelungs- bzw. Halbwertszeit angegeben ist - mit anderen Worten: Bisher war der Wachstumsfaktor mit 2 bzw. 0,5 vorgegeben. Wenn ein anderer Wachstumsfaktor vorgegeben ist, ändert sich nichts an den grundlegenden Prinzipien. Wir haben im Beispiel der Seerosen festgestellt, dass die Seerosen jeden Tag um 14,7% wächst. Diese 14,7% sind die Wachstumsrate p: Der Wachstumsfaktor ist dann $q = 1,147$ und die zugehörige Wachstumsfunktion $B_n = 1 * 1,147^n$.

Um herauszufinden, wann die Seerosen eine gegebene Anzahl erreichen/überschreiten, setzen wir für n solange höhere Werte ein, bis die Zahl erreicht/überschritten ist.

Wenn sich ein Bestand in „Periodenzeit“ um p% verändert, dann ist der Wachstumsfaktor $q = 1 + p$. Die Wachstumsfunktion ist die Standard-Wachstumsfunktion für exponentielle Prozesse: $B_n = B_0 * q^n$. Wollen wir nun das Wachstum für eine andere Zeit als die Periodenlänge berechnen, müssen wir zuerst die Anzahl der vergangenen Perioden bestimmen. Das geht am einfachsten, wenn man die Wachstumsfunktion wie folgt schriebt: $B_{\frac{\text{Zeit}}{\text{Periodenlänge}}} = B_0 * q^{\frac{\text{Zeit}}{\text{Periodenlänge}}}$. Konkretes Beispiel: Eine Bakterienart mit Anfangsbestand 20 wächst alle 4 Tage um 30%. Die Wachstumsfunktion ist $B_n = 20 * 1,3^n$. Wenn wir die Veränderung nach 13 Tagen berechnen wollen: $B_{\frac{13}{4}} = 20 * 1,3^{\frac{13}{4}}$.

Was bedeuten in Wachstumsfunktionen negative Exponenten? Nehmen wir direkt ein Beispiel. Wir legen 10.000 € für 5% an. Die Funktion ist dann $K_n = K_o * 1,05^n$. Wollen wir berechnen, wie hoch das Endkapital in 5 Jahren ist, so rechnen wir $K_5 = 10.000 * 1,05^5$. Wollen wir den Bestand in der Vergangenheit berechnen - beispielsweise vor einem Jahr - rechnen wir $K_{-1} = 10.000 * 1,05^{-1}$. Negative Exponenten bedeuten also, dass wir Werte in der Vergangenheit berechnen, positive Exponenten sind für die Zukunft.

Wann benutzt wir n und wann $n-1$ als Exponenten oder als Variable in linearen Wachstumsfunktionen? Das kommt auf die Aufgabenstellung an. Wir stellen die Funktion immer mit n als Variable auf und prüfen dann, ob sich das richtige Ergebnis ergibt, wenn wir $n = 1$ setzen.

Beispiel Schachbrett (auf der erste Feld wird ein Reiskorn gelegt, danach immer verdoppelt, also exponentielles Wachstum): Die Funktion $B_n = 1 * 2^n$ führt für $n = 1$ zu $B_1 = 2$. Jetzt soll auf dem 1. Feld aber nur ein Reiskorn liegen, also $B_n = 1 * 2^{n-1}$. Jetzt führt $n = 1$ zum richtigen Ergebnis: $B_1 = 1 * q^{1-1} = 1 * 2^0 = 1$. Dabei ist zu beachten, dass q^0 gleich 1 ist.

Beispiel Sitzplätze im Zirkus (Erste Reihe 75 Sitze, dann immer 7 Sitze pro Reihe mehr, lineare Wachstumsfunktionen). Erster Versuch: $B_n = 75 + 7 * n$. $n = 1$ ergibt $B_1 = 75 + 1 * 7 = 82$ für die 1. Reihe; das ist falsch. Also $B_n = 75 + 7 * (n - 1)$. $n = 1$ ergibt $75 + 7 * (1 - 1) = 75 + 7 * 0 = 75$.

Wie unterscheiden wir zwischen linearem und exponentiellem Wachstum? Bei exponentiellem Wachstum ist der Zuwachs in absoluten Zahlen nicht immer gleich, sondern der relative Zuwachs ist es. „Verdoppelung“, „Verdreifachung“, „Halbierung“, sinkt „auf ein Viertel“ oder „steigt um ein Viertel“ oder Prozentangaben sind relative Begriffe und daher exponentielles Wachstum.