1. Berechnen Sie die jeweils fehlenden Werte (Winkel α, β, γ und/oder Seiten a, b und c) in den Dreiecken:
   a) a = 5 cm, $\alpha = 50°$, $\beta = 40°$.
   b) b = 8 cm, c = 4 cm, $\beta = 90°$
   c) a = 5 cm , b = 5 cm, $\gamma = 90°$
   d) c = 7 cm, $\alpha = 25°$, $\beta = 90°$
   e) a = 6 cm, b = 8 cm, c = 10 cm
2. Eine Straße führt mit einem Winkel von 10° den Berg hinauf. Wie viel Prozent Steigung sind dies?
3. Sie schauen aus einem Fenster (E) auf einen gegenüberliegenden Turm. Das Fenster befindet sich 6 Meter über dem Boden (Strecke AE). Sie sehen den unteren Rand des Turms (C) unter einem Senkungswinkel (β) von 11° und den oberen Rand (D) unter einem Erhebungswinkel von 20° (s. Abbildung 1).

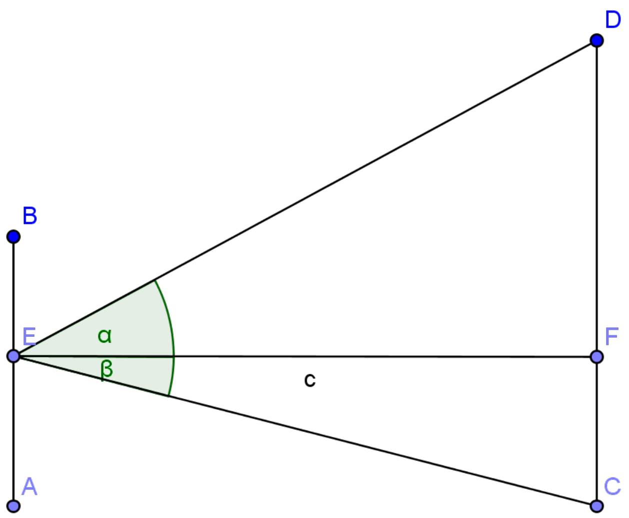

Abbildung 1: Fenster und Turm

   a) Wie weit ist der Turm vom Fenster entfernt?
   b) Wie hoch ist der Turm?
   c) Wie lang ist der Weg vom Fenster zum oberen Ende des Turms?
   d) Wie weit ist der Weg vom Fenster zum unteren Ende des Turms?
4. Die Sonne steht in einem Winkel von 34° über einem Baum. Der Baum wirft einen Schatten von 34°. Wie hoch ist der Baum?
5. Straßen sind in der Regel in der Mitte etwas erhöht, so dass Wasser zur Seite abfließen kann. Die Abbildung 2 skizziert ein solches Profil. Die Neigung der Straße

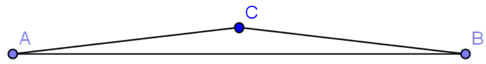

Abbildung 2: Fenster und Turm

ist normalerweise 2,5%. Die Straße ist am Fuß (Strecke AB) 10 Meter breit.

a) Wie groß ist der Neigungswinkel der Straße gegenüber dem Boden?

b) Um wie viel Meter ist die Straße in der Mitte höher als am Rand?

c) Wie groß ist die Oberfläche der Straße, wenn wir ein 10 Meter langes Straßenstück betrachten?

6. Eine Kamera kann mit drei Objektiven ausgestattet werden. diese Objektive unterscheiden sich dadurch, welchen Winkel sie beim Fotografieren erfassen. Sie wollen eine 120 Meter breite Burg fotografieren. Wie weit müssen Sie vom Gebäude entfernt sein, wenn das Objektiv einen Winkel von

   a) 48°

   b) 72°

   c) 86°

   abbildet?

7. Sie stehen gegenüber einem Gebäude und wollen die Höhe eines Fensters berechnen. Die Situation ist in der Abbildung 3 dargestellt. Sie stehen 35 Meter vom Fußpunkt des Gebäudes entfernt und betrachten den oberen Rand des Fensters unter einem Winkel von 23°. Der obere Rand erscheint unter einem Winkel von 25°. Wie hoch ist das Fenster?

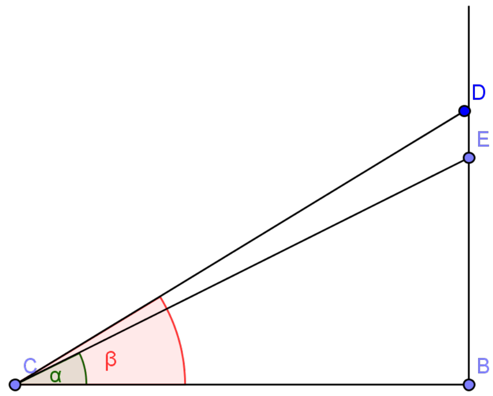

Abbildung 3: Ein Gebäude mit Fenster

Lösungen: 0,12; 1,43; 1,46; 4,2; 5,002; 6,5; 6,9; 7,1; 11,23; 14,68; 15,0; 16,2; 16,32; 17,63; 30; 30,87; 31,45; 32,82; 36,9; 45; 45; 51,89; 53,1; 60; 64,34; 82,58; 100; 134,76

1. a) Der Winkel γ ist 90° - wegen der 180°-Regel. Mit c ist die Hypotenuse des Dreiecks gegeben. Wir suchen die beiden Katheten. Berechnen wir als erstes b. Dies geht beispielsweise über den Tangens von β:

$$\begin{aligned} && \tan(40°) = & \frac{b}{5} && \mid * 5 \\ \iff && b = & 5 * \tan(40°) \\ \iff && b = & 4,2 \end{aligned}$$

c kann auf mehrere Arten bestimmt werden, beispielsweise mit dem Sinus des Winkels $\$alpha$:

$$\begin{aligned} && \sin(50°) = & \frac{5}{c} && \mid * c \\ \iff && c * \sin(40°) = & 5 && \mid : 5 \\ \iff && c = & \frac{5}{\sin(40°)} \\ \iff && c = & 6,5 \end{aligned}$$

b) Wir kennen mit b die Hypotenuse des Dreiecks. Somit können wir beispielsweise den Winkel γ mit Hilfe der seite c und dem Sinus berechnen:

$$\begin{aligned} && \sin(\gamma) = & \frac{c}{b} \\ \iff && \sin(\gamma) = & \frac{4}{8} && \mid \sin^{-1} \\ \iff && \gamma = & \sin^{-1}(2) \\ \iff && \gamma = & 30° \end{aligned}$$

α lässt sich nun über die 180°-Regel als $180° - 90° - 30° = 30°$ berechnen. Es geht aber beispielsweise auch über den Kosinus erfolgen.

$$\begin{aligned} && \cos(\alpha) = & \frac{c}{b} \\ \iff && \cos(\alpha) = & \frac{4}{8} && \mid \cos^{-1} \\ \iff && \alpha = & \cos^{-1}(0,5) \\ \iff && \alpha = & 60° \end{aligned}$$

Die fehlende Kathete können wir mit dem Satz des Pythagoras bestimmen.

$$
\begin{aligned}
& a^2 + c^2 = b^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & 4^2 + a^2 = 8^2 \qquad | - 4^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & a^2 = 8^2 - 4^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & a^2 = 48
\end{aligned}
$$

$|\sqrt{}$

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow\quad & a = \sqrt{48} \\
\Longleftrightarrow\quad & a = 6,9
\end{aligned}
$$

c) Wir haben den rechten Winkel und beide Katheten gegeben. Wir suchen die beiden anderen Winkel und die Hypotenuse. Die Hypotenuse lässt sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras bestimmen:

$$
\begin{aligned}
& a^2 + b^2 = c^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & 5^2 + 5^2 = c^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & 25 + 25 = c^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & c^2 = 50 \qquad |\sqrt{} \\
\Longleftrightarrow\quad & a = \sqrt{50} \\
\Longleftrightarrow\quad & a = 7,1
\end{aligned}
$$

α können wir beispielsweise mit dem Tangens bestimmen:

$$
\begin{aligned}
& \tan(\alpha) = \frac{a}{b} \\
\Longleftrightarrow\quad & \tan(\alpha) = \frac{5}{5} \qquad | \tan^{-1} \\
\Longleftrightarrow\quad & \alpha = \tan^{-1}(1) \\
\Longleftrightarrow\quad & \alpha = 45°
\end{aligned}
$$

Der Winkel β lässt sich über die 180°-Regel bestimmen:

$$\gamma = 180° - 90° - 45° = 45°.$$

d) Gegeben sind der rechte Winkel, einer weiterer Winkel (der dritte Winkel ist 65° nach der 180°-Regel) und eine Kathete. Wir können beispielsweise die andere Kathete zuerst mit Hilfe des Tangens berechnen:

$$
\begin{aligned}
& \tan(65°) = \frac{a}{7} \qquad | * 7 \\
\Longleftrightarrow\quad & a = 7 * \tan(65°) \\
\Longleftrightarrow\quad & a = 15,0
\end{aligned}
$$

Die Hypotenuse können wir über den Satz des Pythagoras bestimmen:

$$\begin{aligned} c^2 + a^2 &= b^2 \\ \Longleftrightarrow \quad 7^2 + 15,0^2 &= b^2 \\ \Longleftrightarrow \quad 36 + 225 &= b^2 \\ \Longleftrightarrow \quad b^2 &= 261 \quad |\sqrt{} \\ \Longleftrightarrow \quad b &= \sqrt{261} \\ \Longleftrightarrow \quad b &= 16,2 \end{aligned}$$

e) Gegeben sind alle 3 Seiten. Das Dreieck ist rechtwinklig (der Satz des Pythagoras ist erfüllt: $6^2 + 8^2 = 10^2$), die Hypotenuse ist c. Wir suchen die beiden Winkel α und β, da $\gamma = 90°$. Für α können wir den Sinus, den Kosinus oder den Tangens nutzen:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} \\ \Longleftrightarrow \quad \tan(\alpha) &= \frac{6}{8} \quad |\tan^{-1} \\ \Longleftrightarrow \quad \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{6}{8}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad \alpha &= 36,9° \end{aligned}$$

Den Winkel β können wir über die 180°-Regel berechnen:

$$\beta = 180° - 90° - 36,9° = 53,1°.$$

2. In dem Dreieck sind der Winkel (10°) und die Ankathete (100 Meter wegen Prozent) gegeben; gesucht ist die Gegenkathete. Daher:

$$\begin{aligned} \tan(10°) &= \frac{b}{100} \quad | * 100 \\ \Longleftrightarrow \quad b &= 100 * \tan(10°) \\ \Longleftrightarrow \quad b &= 17,63 \end{aligned}$$

3. a) In dem unteren Dreieck, von dem wir den Winkel und die Gegenkathete gegeben haben, suchen wir die Ankathete $e = \overline{EF}$

$$\begin{aligned} \tan(11°) &= \frac{6}{e} \quad | * e \\ \Longleftrightarrow \quad e * \tan(11°) &= 6 \quad | : \tan(11°) \\ \Longleftrightarrow \quad e &= \frac{6}{\tan(11°)} \\ \Longleftrightarrow \quad e &= 30,87 \end{aligned}$$

b) Jetzt wird die Gegenkathete ($h_2 = \overline{DF}$) des oberen Dreiecks gesucht

$$\begin{aligned} \tan(20°) &= \frac{h_2}{30,87} && \mid *30,87 \\ \iff h_2 &= 30,87 * \tan(20°) \\ \iff w &= 11,23 \end{aligned}$$

Der Turm ist $11,23 + 6 = 17,23$ Meter hoch.

c) Die Länge der Strecke $g = \overline{ED}$ wird gesucht. ED ist die Hypotenuse des oberen Dreiecks. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin(20°) &= \frac{11,23}{g} && \mid *g \\ \iff g * \sin(20°) &= 11,23 && \mid : \sin(20°) \\ \iff g &= \frac{11,23}{\sin(20°)} \\ \iff g &= 32,82 \end{aligned}$$

d) Die Länge der Strecke $k = \overline{EC}$ wird gesucht. EC ist die Hypotenuse des unteren Dreiecks. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin(11°) &= \frac{6}{k} && \mid *k \\ \iff k * \sin(11°) &= 6 && \mid : \sin(11°) \\ \iff k &= \frac{6}{\sin(11°)} \\ \iff k &= 31,45 \end{aligned}$$

4. Die Höhe des Baums h ist die Ankathete des Winkels α. Der Schatten ist die Gegenkathete:

$$\begin{aligned} \tan(34°) &= \frac{35}{h} && \mid *h \\ \iff h * \tan(34°) &= 35 && \mid : \tan(34°) \\ \iff h &= \frac{35}{\tan(34°)} \\ \iff h &= 51,89 \end{aligned}$$

5. a) 2,5% in eine Winkel umrechnen:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{2,5}{100} && \mid * \tan^{-1} \\ \iff \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{2,5}{100}\right) \\ \iff \alpha &= 1,43° \end{aligned}$$

b) Die Höhe in der Mitte der Straße können wir mit Hilfe des Tangens berechnen. Wir kennen die Ankathete und suchen die Gegenkathete:

$$\begin{aligned} \tan(1,43°) &= \frac{h}{5} && \mid *5 \\ \Longleftrightarrow \quad h &= 5 * \tan(1,43°) \\ \Longleftrightarrow \quad h &= 0,12 \end{aligned}$$

c) Nun suchen wir die Hypotenuse (Strecke AC), beispielsweise mit Hilfe des Kosinus:

$$\begin{aligned} \cos(1,43°) &= \frac{5}{h} && \mid *h \\ \Longleftrightarrow \quad h * \cos(1,43°) &= 5 && \mid : \cos(1,43°) \\ \Longleftrightarrow \quad h &= \frac{5}{\cos(1,43°)} \\ \Longleftrightarrow \quad h &= 5,002 \end{aligned}$$

Die Gesamtlänge der Oberfläche ist 10 Meter und die Fläche des Rechtecks ist $10\ m * 10$ m $= 100$ m^2.

6. Bei allen drei folgenden Rechnungen müssen wir den Winkel und die Breite der Burg halbieren, um einen rechten Winkel zu erhalten. Eine Skizze könnte prinzipiell so aussehen wie Abbildung 2, wobei sich der Fotograf im Punkt C befindet. Wir kennen Jeweils den Winkel und die Gegenkathete; wir suchen die Ankathete.

a)

$$\begin{aligned} \tan(24°) &= \frac{60}{l} && \mid *l \\ \Longleftrightarrow \quad l * \tan(24°) &= 60 && \mid : \tan(24°) \\ \Longleftrightarrow \quad l &= \frac{60}{\tan(24°)} \\ \Longleftrightarrow \quad l &= 134,76 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \tan(36°) &= \frac{60}{l} && \mid *l \\ \Longleftrightarrow \quad l * \tan(36°) &= 60 && \mid : \tan(36°) \\ \Longleftrightarrow \quad l &= \frac{60}{\tan(36°)} \\ \Longleftrightarrow \quad l &= 82,58 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \tan(43°) &= \frac{60}{l} && \mid * l \\ \iff l * \tan(43°) &= 60 && \mid : \tan(43°) \\ \iff l &= \frac{60}{\tan(43°)} \\ \iff l &= 64,34 \end{aligned}$$

7. Wir berechnen den Abstand des unteren und des oberen Randes des Fensters vom Boden. Dazu benutzen wir den Tangens, weil wir den Winkel und die Ankathete haben. wir suchen jeweils die Gegenkathete. Oberer Rand:

$$\begin{aligned} \tan(25°) &= \frac{h}{35} && \mid * 35 \\ \iff h &= 35 * \tan(25°) \\ \iff h &= 16,32 \end{aligned}$$

Unterer Rand

$$\begin{aligned} \tan(23°) &= \frac{h}{35} && \mid * 35 \\ \iff h &= 35 * \tan(23°) \\ \iff h &= 14,86 \end{aligned}$$

Das Fenster ist $16,32$ m $- 14,86$ m $= 1,46$ m.