1. Berechnen Sie die jeweils fehlenden Werte (Winkel α, β, γ und/oder Seiten a, b und c) in den Dreiecken:
   a) c = 12 cm, $\alpha = 50$°, $\beta = 40$°.
   b) a = 6 cm, c = 3 cm, $\beta = 90$°
   c) c = 12 cm , b = 5 cm, $\gamma = 90$°
   d) c = 6 cm, $\alpha = 55$°, $\beta = 90$°
   e) a = 3 cm, b = 5 cm, c = 4 cm
2. Mit Hilfe eines Helikopters soll die Breite eines Flusses gemessen werden. Der Helikopter steht senkrecht 300 Meter über dem einen Ufer des Flusses. Er peilt die andere Seite des Flusses unter einem Winkel von 12° an. Wie breit ist der Fluss?
3. Ein Funkmast soll mit Hilfe von Stahlseilen abgesichert werden. Die Seile werden in einer Höhe von 50 Metern angebracht. Sie bilden eine Winkel von 65° gegenüber dem Boden.
   a) Wie lang sind die Seile?
   b) In welcher Entfernung vom Mast müssen die Seile im Boden verankert werden?
4. Ein Flugzeug steigt in der Startphase mit einem Winkel von 37° in die Höhe.
   a) Welche Strecke muss es gegenüber dem Boden zurücklegen, damit es eine Flughöhe von 10.000 Metern erreicht?
   b) Welchen Weg hat es dabei zurückgelegt?
5. Wie lang muss eine Leiter sein, die an einer Wand eine Höhe von 20 Metern erreichen soll und dabei einen Winkel gegenüber dem Boden von 77,5° bilden soll?
6. Ein PKW fährt 600 Meter auf einer Straße. Er überwindet dabei einen Höhenunterschied von 40 Meter. Wie viel Grad beträgt die Steigung? Wie viel Prozent sind dies?
7. Wie hoch ist ein Berg, den Sie unter einem Winkel von 52° sehen, wenn Sie 750 Meter entfernt von dem Berg stehen? Wie weit sind sie von der Bergspitze entfernt?
8. Berechnen Sie die zugehörigen Winkel:
   a) tan(0)
   b) sin(0)
   c) cos(0)
   d) $y = -1,5x + 4$
   e) 75%
9. Berechnen Sie die prozentuale Steigung:
   a) 20°
   b) 85°

Lösungen: -56,3; 0; 0; 3,82; 6,68; 6,7; 7,7; 9,19; 10,9; 12,9; 14,2; 20,49; 23,31; 24,6; 36,4; 36,9; 36,9; 53,1; 55,17; 63,4; 63,77; 65,4; 90; 959,96; 1.143,0; 1.218,20; 13.270,45; 16.616,40

1. a) Der Winkel γ ist 90° - wegen der 180°-Regel. Mit c ist die Hypotenuse des Dreiecks gegeben. Wir suchen die beiden Katheten. Berechnen wir als erstes a. Dies geht beispielsweise über den Sinus von α[1]:

$$\begin{aligned} \sin(50°) &= \frac{a}{12} && | * 5 \\ \Longleftrightarrow \quad a &= 12 * \sin(50°) \\ \Longleftrightarrow \quad a &= 9,19 \end{aligned}$$

b können wir jetzt ebenfalls mit Sinus, aber mit dem von β bestimmen:

$$\begin{aligned} \sin(40°) &= \frac{b}{12} && | * 12 \\ \Longleftrightarrow \quad b &= 12 * \sin(40°) \\ \Longleftrightarrow \quad b &= 7,7 \end{aligned}$$

b) Wir haben den rechten Winkel und die beiden Katheten gegeben. Wir suchen die Hypotenuse und die beiden Winkel α und γ. Zuerst berechnen wir den Winkel α. Da wir die beiden Katheten haben, steht uns der Tangens zur Verfügung:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{a}{c} \\ \Longleftrightarrow \quad \tan(\alpha) &= \frac{6}{3} && | \tan^{-1} \\ \Longleftrightarrow \quad \alpha &= \tan^{-1}(2) \\ \Longleftrightarrow \quad \alpha &= 63,4° \end{aligned}$$

γ lässt sich nun über die 180°-Regel als $180° - 90° - 63,4° = 16,6°$ berechnen. Die Hypotenuse können wir auf verschiedenen Wegen berechnen, zum Beispiel mit dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= b^2 \\ \Longleftrightarrow \quad 6^2 + 3^2 &= b^2 \\ \Longleftrightarrow \quad 36 + 9 &= b^2 \\ \Longleftrightarrow \quad 45 &= b^2 && |\sqrt{\ } \\ \Longleftrightarrow \quad b &= \sqrt{45} \\ \Longleftrightarrow \quad b &= 6,7 \end{aligned}$$

c) Wir haben den rechten Winkel, die Hypotenuse c und eine Kathete b gegeben. Wir suchen die andere Kathete und die beiden anderen Winkel. Die

[1] Oder über den Kosinus von β. Genau so gut könnten wir zuerst b über den Sinus von β oder den Kosinus von α ausrechnen.

Kathete können wir über den Satz des Pythagoras bestimmen:

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= c^2 \\ \iff a^2+5^2 &= 12^2 \\ \iff a^2+25 &= 144 \qquad |-25 \\ \iff a^2 &= 119 \qquad |\sqrt{} \\ \iff a &= \sqrt{119} \\ \iff a &= 10,9 \end{aligned}$$

α können wir beispielsweise mit dem Kosinus bestimmen:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{b}{c} \\ \iff \cos(\alpha) &= \frac{5}{12} \qquad |\cos^{-1} \\ \iff \alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) \\ \iff \alpha &= 65,4° \end{aligned}$$

Der Winkel γ lässt sich über die 180°-Regel bestimmen:

$$\gamma = 180° - 90° - 65,4° = 24,6°.$$

d) Gegeben sind der rechte Winkel, einer weiterer Winkel (der dritte Winkel ist 25° nach der 180°-Regel) und eine Kathete. Wir können beispielsweise die andere Kathete zuerst mit Hilfe des Tangens berechnen:

$$\begin{aligned} \tan(65°) &= \frac{a}{6} \qquad |*6 \\ \iff a &= 6*\tan(65°) \\ \iff a &= 12,9 \end{aligned}$$

Die Hypotenuse können wir über den Satz des Pythagoras bestimmen:

$$\begin{aligned} c^2+a^2 &= b^2 \\ \iff 6^2+12,9^2 &= b^2 \\ \iff 36+166,41 &= b^2 \\ \iff b^2 &= 202,41 \qquad |\sqrt{} \\ \iff b &= \sqrt{202,41} \\ \iff b &= 14,2 \end{aligned}$$

e) Gegeben sind alle 3 Seiten. Das Dreieck ist rechtwinklig (der Satz des Pythagoras ist erfüllt: $3^2+4^2=5^2$), die Hypotenuse ist c. Wir suchen die beiden

Winkel α und β, da $\gamma = 90°$. Für α können wir den Sinus, den Kosinus oder den Tangens nutzen:

$$\begin{aligned} && \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} \\ \Longleftrightarrow && \tan(\alpha) &= \frac{3}{4} && \mid \tan^{-1} \\ \Longleftrightarrow && \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \\ \Longleftrightarrow && \alpha &= 36,9° \end{aligned}$$

Den Winkel β können wir über die 180°-Regel berechnen:

$$\beta = 180° - 90° - 36,9° = 53,1°.$$

2. In dem Dreieck sind der Winkel und die Ankathete gegeben; gesucht ist die Gegenkathete. Daher:

$$\begin{aligned} && \tan(12°) &= \frac{b}{300} && \mid * 300 \\ \Longleftrightarrow && b &= 300 * \tan(12°) \\ \Longleftrightarrow && b &= 63,77 \end{aligned}$$

3. In dem Dreieck sind der Winkel und die Gegenkathete gegeben.
   a) Wir suchen die Hypotenuse:

$$\begin{aligned} && \sin(65°) &= \frac{50}{l} && \mid * l \\ \Longleftrightarrow && l * \sin(65°) &= 50 && \mid : \sin(65°) \\ \Longleftrightarrow && l &= \frac{50}{\sin(65°)} \\ \Longleftrightarrow && l &= 55,17 \end{aligned}$$

   b) Jetzt wird die Ankathete gesucht, beispielsweise mit dem Tangens:

$$\begin{aligned} && \tan(65°) &= \frac{50}{w} && \mid * w \\ \Longleftrightarrow && w * \tan(65°) &= 50 && \mid : \tan(65°) \\ \Longleftrightarrow && w &= \frac{50}{\tan(65°)} \\ \Longleftrightarrow && w &= 23,31 \end{aligned}$$

4. In dem Dreieck haben wir den Winkel und die Gegenkathete gegeben.

a) Wir suchen die Ankathete:

$$\begin{aligned} \tan(37°) &= \frac{10.000}{w} && \mid *w \\ \Longleftrightarrow \quad w*\tan(37°) &= 10.000 && \mid : \tan(37°) \\ \Longleftrightarrow \quad w &= \frac{10.000}{\tan(37°)} \\ \Longleftrightarrow \quad w &= 13.270,45 \end{aligned}$$

b) Wir suchen die Hypotenuse:

$$\begin{aligned} \sin(37°) &= \frac{10.000}{l} && \mid *l \\ \Longleftrightarrow \quad l*\sin(37°) &= 10.000 && \mid : \sin(35°) \\ \Longleftrightarrow \quad l &= \frac{10.000}{\sin(37°)} \\ \Longleftrightarrow \quad l &= 16.616,40 \end{aligned}$$

5. Wir haben den Winkel und die Gegenkathete gegeben und suchen die Hypotenuse:

$$\begin{aligned} \sin(77,5°) &= \frac{20}{l} && \mid *l \\ \Longleftrightarrow \quad l*\sin(77,5°) &= 20 && \mid : \sin(77,5°) \\ \Longleftrightarrow \quad l &= \frac{20}{\sin(77,5°)} \\ \Longleftrightarrow \quad l &= 20,49 \end{aligned}$$

6. In dem Dreieck haben wir die Gegenkathete und die Hypotenuse gegeben:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{40}{600} && \mid *l \quad \sin^{-1} \\ \Longleftrightarrow \quad \alpha &= \sin^{-1}(\frac{40}{600}) \\ \Longleftrightarrow \quad \alpha &= 3,82° \end{aligned}$$

$$p = 100 * \tan(3,82°) = 6,68\%$$

7. In dem Dreieck haben wir einen Winkel und die Ankathete gegeben.
   a) Wir suchen die Gegenkathete

$$\begin{aligned} \tan(52°) &= \frac{h}{750} && \mid *750 \\ \Longleftrightarrow \quad h &= 750*\tan(52°) \\ \Longleftrightarrow \quad h &= 959,96 \end{aligned}$$

b) Wir suchen die Hypotenuse:

$$\begin{aligned}
& \cos(52°) = \frac{750}{l} && \mid * l \\
\iff\ & l * \cos(52°) = 750 && \mid : \cos(52°) \\
\iff\ & l = \frac{750}{\cos(52°)} \\
\iff\ & l = 1.218,20
\end{aligned}$$

8. a) $\alpha = \tan^{-1}(0) = 0°$
   b) $\alpha = \sin^{-1}(0) = 0°$
   c) $\alpha = \cos^{-1}(0) = 90°$
   d) $\alpha = \tan^{-1}(-1,5) = -56,3°$
   e) $\alpha = \tan^{-1}(0,75) = 36,9°$
9. Aus $\tan(\alpha) = \frac{p}{100}$ folgt $p = 100 * \tan(\alpha)$.
   a) $p = 100 * \tan(20°) = 36,4$%
   b) $p = 100 * \tan(85°) = 1143,0$%