1. Berechnen Sie die jeweils fehlenden Werte (Winkel α, β, γ und/oder Seiten a, b und c) in den Dreiecken:
   a) c = 5 cm, $\alpha = 50$°, $\beta = 40$°.
   b) a = 8 cm, c = 4 cm, $\beta = 90$°
   c) c = 6 cm, b = 5 cm, $\gamma = 90$°
   d) c = 4 cm, $\alpha = 65$°, $\beta = 90$°
   e) a = 12 cm, b = 16 cm, c = 20 cm
2. Sie sehen den unteren Fuß eines Berges unter einem Winkel von $\beta = 1$°. Sie befinden sich mit dem Fuße des Berges auf einer Höhe. Ihre Augenhöhe ist 1,60 Meter. Die Bergspitze sehen Sie unter einem Steigungswinkel von $\alpha = 76$°.

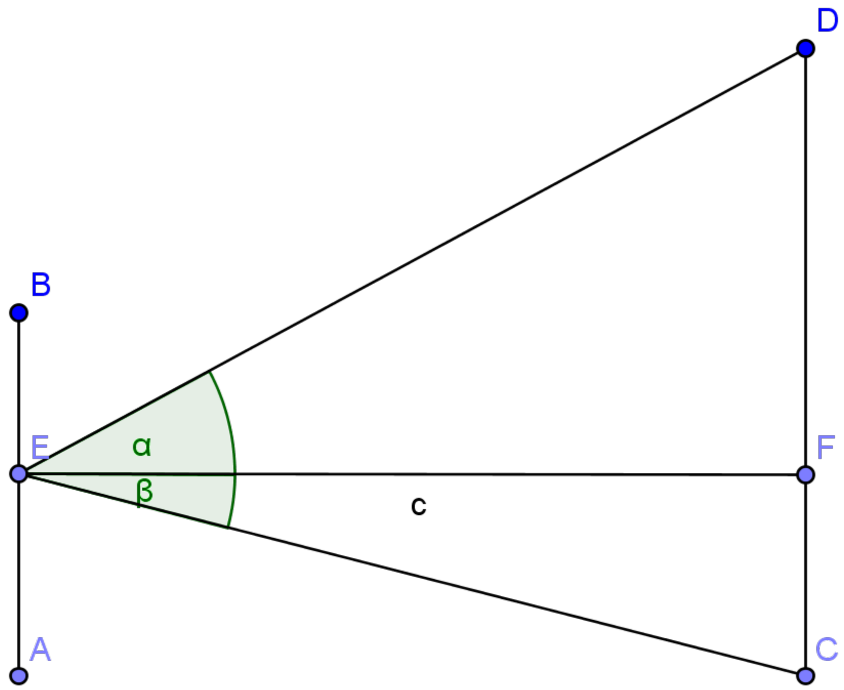

Abbildung 1: Die Höhe eines Berges

   a) Wie weit sind Sie vom Berg entfernt?
   b) Wie hoch ist der Berg?
3. Eine Straße hat ein (durchschnittliches) Gefälle von 6%.
   a) Geben Sie das Gefälle der Straße in Grad an.
   b) Wie lang ist die Strecke, die ein Auto zurücklegen muss, das einen Höhenunterschied von 200 Metern überwindet?

4. Ein 15 Meter hoher Baum wirft einen Schatten von 7,50 Metern. In welchem Winkel steht die Sonne über dem Baum?
5. Eine Leiter soll eine Höhe von 10 Metern an einer Wand erreichen. Ihr Winkel gegenüber dem Boden soll 75° sein.
   a) Wie lang muss die Leiter sein?
   b) Wie weit ist der Fußpunkt der Leiter von der Wand entfernt?
6. Berechnen Sie die zugehörigen Winkel:
   a) tan$(0,5)$
   b) sin$(0,5)$
   c) cos$(0,5)$
   d) $y = 2,5x + 4$
   e) 70%
7. Berechnen Sie die prozentuale Steigung:
   a) 45°
   b) 10°
8. Sie stehen zwischen zwei Bergen. Der eine ist 700 Meter entfernt und Sie sehen seine Spitze unter einem Winkel von 67° gegenüber dem Boden. Der andere ist 500 Meter entfernt und Sie sehen seine Spitze unter einem Winkel von 75° gegenüber dem Boden.
   a) Welcher der Berge ist höher und wie groß ist der Höhenunterschied?
   b) Wie groß müsste der Winkel bei dem Berg, von dem Sie weiter entfernt stehen, sein, damit beide Berge gleich hoch sind?

Lösungen: 2,68; 3,2; 3,3; 3,43; 3,8; 8,6; 8,9; 9,5; 10,35; 17,63; 26,6; 26,6; 30; 33,6; 35; 36,9; 56,4; 60; 63,4; 68,2; 69,44;91,66; 100; 367,63; 1.649,10; 1.866,333.342,8

1. a) Der Winkel γ ist 90° - wegen der 180°-Regel. Mit c ist die Hypotenuse des Dreiecks gegeben. Wir suchen die beiden Katheten. Berechnen wir als erstes a. Dies geht beispielsweise über den Sinus von α[1]:

$$\begin{aligned} \sin(50°) &= \frac{a}{5} && \mid *5 \\ \iff a &= 5 * \sin(50°) \\ \iff a &= 3,8 \end{aligned}$$

b können wir jetzt ebenfalls mit Sinus, aber mit dem von β bestimmen[2]:

$$\begin{aligned} \sin(40°) &= \frac{b}{5} && \mid *5 \\ \iff b &= 5 * \sin(40°) \\ \iff b &= 3,2 \end{aligned}$$

b) Wir haben den rechten Winkel und die beiden Katheten gegeben. Wir suchen die Hypotenuse und die beiden Winkel α und γ. Zuerst berechnen wir den Winkel α. Da wir die beiden Katheten haben, steht uns der Tangens zur Verfügung:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{a}{c} \\ \iff \tan(\alpha) &= \frac{8}{4} && \mid \tan^{-1} \\ \iff \alpha &= \tan^{-1}(2) \\ \iff \alpha &= 63,4° \end{aligned}$$

γ lässt sich nun über die 180°-Regel als $180° - 90° - 63,4° = 16,6°$ berechnen. Die Hypotenuse können wir auf verschiedenen Wegen berechnen, zum Beispiel mit dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= b^2 \\ \iff 8^2 + 4^2 &= b^2 \\ \iff 64 + 16 &= b^2 \\ \iff 80 &= b^2 && \mid\sqrt{} \\ \iff b &= \sqrt{80} \\ \iff b &= 8,9 \end{aligned}$$

c) Wir haben den rechten Winkel, die Hypotenuse c und eine Kathete b gegeben. Wir suchen die andere Kathete und die beiden anderen Winkel. Die

[1] Oder über den Kosinus von β. Genau so gut könnten wir zuerst b über den Sinus von β oder den Kosinus von α ausrechnen.

[2] Zudem stehen uns noch der Kosinus von $alpha$, der Tangens von α oder β oder der Satz des Pythagoras zur Verfügung.

Kathete können wir über den Satz des Pythagoras bestimmen:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ \Longleftrightarrow \quad a^2 + 5^2 &= 6^2 \\ \Longleftrightarrow \quad a^2 + 25 &= 36 \qquad |-25 \\ \Longleftrightarrow \quad a^2 &= 11 \qquad |\sqrt{} \\ \Longleftrightarrow \quad a &= \sqrt{11} \\ \Longleftrightarrow \quad a &= 3,3 \end{aligned}$$

α können wir beispielsweise mit dem Kosinus bestimmen:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{b}{c} \\ \Longleftrightarrow \quad \cos(\alpha) &= \frac{5}{6} \qquad |\cos^{-1} \\ \Longleftrightarrow \quad \alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad \alpha &= 33,6° \end{aligned}$$

Der Winkel γ lässt sich über die 180°-Regel bestimmen:

$$\gamma = 180° - 90° - 33.6° = 56,4°.$$

d) Gegeben sind der rechte Winkel, einer weiterer Winkel (der dritte Winkel ist 25° nach der 180°-Regel) und eine Kathete. Wir können beispielsweise die andere Kathete zuerst mit Hilfe des Tangens berechnen:

$$\begin{aligned} \tan(65°) &= \frac{a}{4} \qquad |*4 \\ \Longleftrightarrow \quad a &= 4 * \tan(65°) \\ \Longleftrightarrow \quad a &= 8,6 \end{aligned}$$

Die Hypotenuse können wir über den Satz des Pythagoras bestimmen:

$$\begin{aligned} c^2 + a^2 &= b^2 \\ \Longleftrightarrow \quad 4^2 + 8,6^2 &= b^2 \\ \Longleftrightarrow \quad 16 + 73,96 &= b^2 \\ \Longleftrightarrow \quad b^2 &= 89,96 \qquad |\sqrt{} \\ \Longleftrightarrow \quad b &= \sqrt{89,96} \\ \Longleftrightarrow \quad b &= 9,5 \end{aligned}$$

e) Gegeben sind alle 3 Seiten. Das Dreieck ist rechtwinklig (der Satz des Pythagoras ist erfüllt: $12^2 + 16^2 = 20^2$), die Hypotenuse ist c. Wir suchen die beiden Winkel α und β, da $\gamma = 90°$. Für α können wir den Sinus, den Kosinus oder den Tangens nutzen:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} \\ \iff \tan(\alpha) &= \frac{12}{16} \qquad \mid \tan^{-1} \\ \iff \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{12}{16}\right) \\ \iff \alpha &= 36,9° \end{aligned}$$

Den Winkel β können wir über die 180°-Regel berechnen:

$$\beta = 180° - 90° - 36,9° = 53,1°.$$

2. a) In dem unteren Dreieck sind der Winkel und die Ankathete gegeben. Gesucht wird die Gegenkathete. Wir benutzen den Tangens:

$$\begin{aligned} \tan(1°) &= \frac{1,60}{\overline{EF}} \qquad \mid * \overline{EF} \\ \iff \overline{EF} * \tan(1°) &= 1,60 \qquad \mid : \tan(1°) \\ \iff \overline{EF} &= \frac{1,60}{\tan(1°)} \\ \iff \overline{EF} &= 91,66 \end{aligned}$$

   b) Für die Höhe des Berges benötigen wir die Strecken $\overline{CF} = 1,60$ Meter und $\overline{DF}$. $\overline{DF}$ ist im oberen Dreieck die Gegenkathete zu $\alpha = 76°$. Wir benutzen den Tangens:

$$\begin{aligned} \tan(76°) &= \frac{\overline{DF}}{91,66} \qquad \mid * 91,66 \\ \iff 91,66 * \tan(76°) &= \overline{DF} \\ \iff \overline{DF} &= 367,63 \end{aligned}$$

   Der Berg ist $367,63 + 1,60 = 369,23$ Meter hoch.

3. a) Eine (durchschnittliche) Steigung von 6% bedeutet, dass es auf einer Strecke von 100 Metern (Ankathete) 6 Meter nach oben geht (Gegenkathete). Wir haben die beiden Katheten und können daher den Tangens nutzen:

$$\begin{aligned} \iff \tan(\alpha) &= \frac{6}{100} \qquad \mid \tan^{-1} \\ \iff \alpha &= \tan^{-1}(0,06) \\ \iff \alpha &= 3,43° \end{aligned}$$

b) Gesucht ist nun die Hypotenuse des Dreiecks. Gegeben sind der Winkel und die Gegenkathete mit 200 Metern. Wir nutzen den Sinus:

$$\begin{aligned} \sin(3,43°) &= \frac{200}{l} && \mid *\, l \\ \Longleftrightarrow \quad l * \sin(3,43°) &= 200 && \mid : \sin(3,43°) \\ \Longleftrightarrow \quad l &= \frac{200}{\sin(3,43°)} \\ \Longleftrightarrow \quad l &= 3342,88 \end{aligned}$$

4. In dem Dreieck sind die Gegenkathete (7,50 Meter) und die Ankathete (15 Meter) gegeben. Wir nutzen den Tangens:

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad \tan(\alpha) &= \frac{7,5}{15} && \mid \tan^{-1} \\ \Longleftrightarrow \quad \alpha &= \tan^{-1}(0,5) \\ \Longleftrightarrow \quad \alpha &= 26,6° \end{aligned}$$

5. a) In dem Dreieck haben wir den Winkel und die Gegenkathete (10 Meter) gegeben. Gesucht ist die Hypotenuse. Wir nutzen den Sinus:

$$\begin{aligned} \sin(75°) &= \frac{10}{l} && \mid *\, l \\ \Longleftrightarrow \quad l * \sin(75°) &= 10 && \mid : \sin(75°) \\ \Longleftrightarrow \quad l &= \frac{10}{*\sin(75°)} \\ \Longleftrightarrow \quad l &= 10,35 \end{aligned}$$

b) Gesucht ist die Ankathete des Winkels. Wir nutzen den Tangens:

$$\begin{aligned} \tan(75°) &= \frac{10}{w} && \mid *\, w \\ \Longleftrightarrow \quad w * \tan(75°) &= 10 && \mid : \tan(75°) \\ \Longleftrightarrow \quad w &= \frac{10}{\tan(75°)} \\ \Longleftrightarrow \quad w &= 2,68 \end{aligned}$$

6. a) $\alpha = \tan^{-1}(0,5) = 26,6°$
   b) $\alpha = \sin^{-1}(0,5) = 30°$
   c) $\alpha = \cos^{-1}(0,5) = 60°$
   d) $\alpha = \tan^{-1}(2,5) = 68,2°$
   e) $\alpha = \tan^{-1}(0,7) = 35,0°$
7. Aus $\tan(\alpha) = \frac{p}{100}$ folgt $p = 100 * \tan(\alpha)$.

a) $p = 100 * \tan(45°) = 100$%

b) $p = 100 * \tan(45°) = 17,63$%

8. a) In beiden Dreiecken haben wir die Ankathete gegeben und suchen die Gegenkathete. Für den einen Berg gilt:

$$\begin{aligned} \tan(67°) &= \frac{h_1}{700} && \mid * 700 \\ \Longleftrightarrow \quad h_1 &= 700 * \tan(67°) \\ \Longleftrightarrow \quad h_1 &= 1649,10 \end{aligned}$$

und für den anderen

$$\begin{aligned} \tan(75°) &= \frac{h_2}{500} && \mid * 500 \\ \Longleftrightarrow \quad h_2 &= 500 * \tan(75°) \\ \Longleftrightarrow \quad h_2 &= 1866,03 \end{aligned}$$

b) Gegeben sind in dem Dreieck die Ankathete (700 Meter) und die Gegenkathete (1866,03 Meter). Den Winkel errechnen wir über den Tangens:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{1866,03}{700} && \mid \tan^{-1} \\ \Longleftrightarrow \quad \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{1866,03}{700}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad \alpha &= 69,44° \end{aligned}$$