1. Berechnen Sie die jeweils fehlenden Größen (Winkel α, β und γ, Seiten a, b und c) in den folgenden Dreiecken:
   a) $a = 5$ cm, $b = 9$ cm, $\gamma = 90°$
   b) $c = 9$ cm, $a = 6$ cm, $\gamma = 56,3°$ (Überlegen Sie zuerst, wo der rechte Winkel sein muss!)
   c) $a = 4,5$ cm, $\beta = 57,3°$, $\gamma = 32,7°$
   d) $b = 8,1$ cm, $c = 5,3$ cm, $\alpha = 90°$
2. Eine 7 Meter lange Leiter lehnt an einer Hauswand. Sie schließt mit dem Boden eine Winkel von 70° ein.
   a) In welcher Höhe lehnt die Leiter an der Wand?
   b) Wie weit ist der Fußpunkt der Leiter von der Wand entfernt?
3. Eine Straße führt mit einem Gefälle von 7% den Berg hinab. Wie viel Grad sind dies?
4. Eine Leiter soll einen Höhenunterschied von 2 Metern überwinden. Ihr Winkel gegenüber dem Boden soll 35° betragen.
   a) Wie lang ist die Leiter?
   b) Wie weit ist der Fußpunkt der Leiter von der Wand entfernt?
5. Das (symmetrische und im Querschnitt dreieckige) Dach eines Hauses ist 3,50 Meter hoch, das Haus ist 11 Meter breit.
   a) Welchen Winkel bilden das Dach und das Haus?
   b) Wie lang sind die Dachsparren?
6. Eine Stehleiter ist 3 Meter lang. Ihr Öffnungswinkel α beträgt 50° (siehe Abbildung 1).
   a) Wie hoch ist die Leiter?
   b) Wie weit stehen die beiden Fußpunkte auseinander?

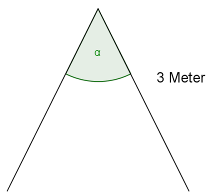

Abbildung 1: Eine Stehleiter

7. Die Steigung einer Garageneinfahrt beträgt 15%.
   a) Berechnen Sie den Steigungswinkel.
   b) Wie weit ist die Garage von der Straße entfernt, wenn die Zufahrt 5 Meter lang ist?

c) Wie lang ist die Zufahrt, wenn die Garage 5 Meter von der Straße entfernt steht?

8. Ein Kanal hat die Form eines symmetrischen Trapezes mit folgendem Querschnitt: Die untere Sohle a ist 2,50 Meter breit. Der Winkel α ist 55° groß. Der Kanal ist $h_T = 2$ Meter hoch.

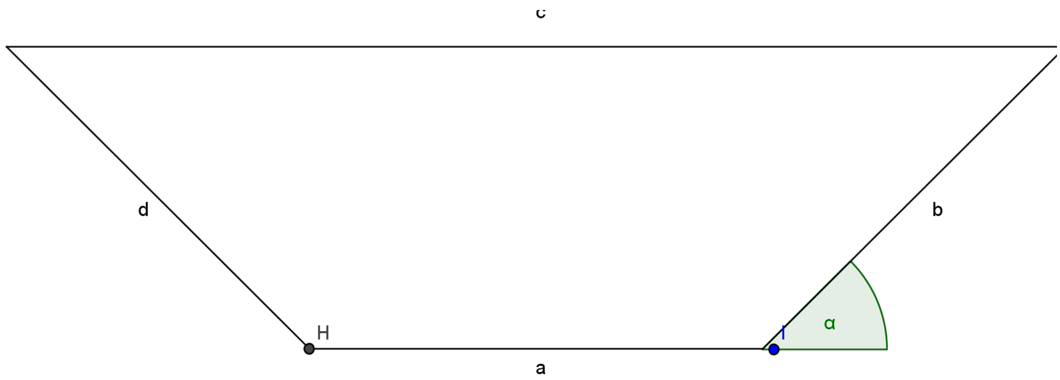

Abbildung 2: Querschnitt eines Kanals

a) Wie lang ist die obere Kante des Kanals?

b) Welche Menge Wasser fasst der Kanal auf 20 Metern Länge, wenn er zu einem Meter in der Höhe gefüllt ist? (Anmerkung: Das Volumen eines Prismas berechnet man mit $V = G * h$. Dabei ist G die Grundfläche - hier die Fläche des Trapezes mit $G = \frac{a+c}{2} * h_T$ und h die Körperhöhe - hier 20 Meter)

9. Ein Hubschrauber fliegt 300 Meter senkrecht über einem Ufer eines Flusses. Das andere Ufer peilt er unter einem Winkel von $\alpha = 10°$ an. Wie breit ist der Fluss?

Lösungen: 0,70; 1,27; 1,40; 2,39; 2,4; 2,68; 2,72; 3,49; 4; 4,94; 5,06; 6,52; 6,58; 8,53; 9,7; 10,3; 10,8; 29,1; 32,47; 33,2; 33,7; 52,90; 56,8; 60,9; 64

1. Berechnen Sie die jeweils fehlenden Größen (Winkel α, β und γ, Seiten a, b und c) in den folgenden Dreiecken:

   a) c ist die Hypotenuse. α können wir über den Tangens bestimmen:

$$\begin{aligned} & \tan(\alpha) = && \frac{5}{9} && \mid \tan^{-1} \\ \Longleftrightarrow \quad & \alpha = && \tan^{-1}(\frac{5}{9}) && \\ \Longleftrightarrow \quad & \alpha = && 29,1° && \end{aligned}$$

   β können wir über die 180°-Regel oder beispielsweise über den Tangens bestimmen:

$$\begin{aligned} & \tan(\alpha) = && \frac{9}{5} && \mid \tan^{-1} \\ \Longleftrightarrow \quad & \alpha = && \tan^{-1}(1,8) && \\ \Longleftrightarrow \quad & \alpha = && 60,9° && \end{aligned}$$

   c als Hypotenuse können wir mit Hilfe des Sinus bestimmen:

$$\begin{aligned} & \sin(29,1°) = && \frac{5}{c} && \mid * c \\ \Longleftrightarrow \quad & c * \sin(29,1°) = && 5 && \mid : \sin(29,1°) \\ \Longleftrightarrow \quad & c = && \frac{5}{\sin(29,1°)} && \\ \Longleftrightarrow \quad & c = && 10,3 && \end{aligned}$$

   b) a kann nicht die Hypotenuse sein, da c länger ist. c kann auch nicht die Hypotenuse sein, da $\gamma \neq 90°$ ist, somit ist b die Hypotenuse und $\beta = 90°$. b können wir beispielsweise mit Hilfe des Sinus von γ bestimmen:

$$\begin{aligned} & \sin(56,3°) = && \frac{9}{b} && \mid * b \\ \Longleftrightarrow \quad & b * \sin(56,3°) = && 9 && \mid : \sin(56,3°) \\ \Longleftrightarrow \quad & b = && \frac{9}{\sin(56,3°)} && \\ \Longleftrightarrow \quad & b = && 10,8 && \end{aligned}$$

   α können wir beispielsweise über die 180°-Regel ausrechnen oder auch mit Hilfe des Sinus:

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha) = && \frac{6}{10,8} && \mid * \sin^{-1} \\ \Longleftrightarrow \quad & \alpha = && \sin^{-1}(\frac{6}{10,8}) && \\ \Longleftrightarrow \quad & \alpha = && 33,7° && \end{aligned}$$

c) α ist der rechte Winkel und a damit die Hypotenuse. b können wir beispielsweise mit Hilfe des Sinus berechnen:

$$\begin{aligned} \sin(57,3°) &= \frac{b}{4,5} && \mid *4,5 \\ \iff b &= 4,5 * \sin(57,3°) \\ \iff b &= 3,8 \end{aligned}$$

Genauso können wir den Kosinus für die Berechnung von c nutzen:

$$\begin{aligned} \cos(57,3°) &= \frac{c}{4,5} && \mid *4,5 \\ \iff c &= 4,5 * \cos(57,3°) \\ \iff c &= 2,4 \end{aligned}$$

d) Gegeben sind die beiden Katheten. Somit können wir die beiden gesuchten Winkel mit Hilfe des Tangens bestimmen:

$$\begin{aligned} \tan(\beta) &= \frac{8,1}{5,3} && \mid \tan^{-1} \\ \iff \beta &= \tan^{-1}(\frac{8,1}{5,3}) \\ \iff \beta &= 56,8° \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tan(\beta) &= \frac{5,3}{8,1} && \mid \tan^{-1} \\ \iff \gamma &= \tan^{-1}(\frac{5,3}{8,1}) \\ \iff \gamma &= 33,2° \end{aligned}$$

Die Hypotenuse a können wir mit Hilfe des Sinus von β berechnen:

$$\begin{aligned} \sin(33,2°) &= \frac{5,3}{a} && \mid *a \\ \iff a * \sin(33,2°) &= 5,3 && \mid : \sin(33,2°) \\ \iff a &= \frac{5,3}{\sin(33,2°)} \\ \iff a &= 9,7 \end{aligned}$$

2. Eine 7 Meter lange Leiter lehnt an einer Hauswand. Sie schließt mit dem Boden eine Winkel von 70° ein

   a) Ein Winkel und die Hypotenuse sind gegeben. Gesucht wird die Gegenkathete. Also:

$$\begin{aligned} \sin(70°) &= \frac{h}{7} && \mid *7 \\ \iff h &= 7 * \sin(70°) \\ \iff h &= 6,58 \end{aligned}$$

b) Jetzt suchen wir die Ankathete des Winkels:

$$\begin{aligned} \cos(70°) &= \frac{h}{7} && \mid * 7 \\ \Longleftrightarrow \quad h &= 7 * \cos(70°) \\ \Longleftrightarrow \quad h &= 2,39 \end{aligned}$$

3. Eine Straße führt mit einem Gefälle von 7% den Berg hinab. Wie viel Grad sind dies? Wir haben die Gegenkathete (7 Meter) und die Ankathete (100 Meter) des Winkels α gegeben:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{7}{100} && \mid * \tan -1 \\ \Longleftrightarrow \quad \alpha &= \tan^{-1}(0,07) \\ \Longleftrightarrow \quad &= 4° \end{aligned}$$

4. Eine Leiter soll einen Höhenunterschied von 2 Meter überwinden. Ihr Winkel gegenüber dem Boden soll 35° betragen.
   a) Wie lang ist die Leiter? Gegeben sind der Winkel $\alpha = 35°$ und die Gegenkathete. Gesucht ist die Hypotenuse:

$$\begin{aligned} \sin(35°) &= \frac{2}{l} && \mid * l \\ \Longleftrightarrow \quad l * \sin(35°) &= 2 && \mid : \sin(35°) \\ \Longleftrightarrow \quad l &= \frac{2}{\sin(35°)} \\ \Longleftrightarrow \quad l &= 3,49 \end{aligned}$$

   b) Wie weit ist der Fußpunkt der Leiter von der Wand entfernt? Nun wird bei gegebenem Winkel und der Gegenkathete die Ankathete gesucht:

$$\begin{aligned} \tan(35°) &= \frac{2}{d} && \mid * d \\ \Longleftrightarrow \quad d * \tan(45°) &= 2 && \mid : \tan(35°) \\ \Longleftrightarrow \quad d &= \frac{2}{\tan(35°)} \\ \Longleftrightarrow \quad d &= 2,86 \end{aligned}$$

5. Das (symmetrische) Dach eines Hauses ist 3,50 Meter hoch, das Haus ist 11 Meter breit.
   a) Welchen Winkel bilden das Dach und das Haus? Bevor wir rechnen, müssen wir die Höhe des Daches einzeichnen, damit wir ein rechtwinkliges Dreieck erhalten. Wegen der Symmetrie das Daches wird die Seite des Hauses durch

die Höhe halbiert. Gegeben sind in dem entstandenen rechtwinkligen Dreieck die Ankathete und die Gegenkathete. Gesucht ist der Winkel:

$$\begin{aligned} && \tan(\alpha) =&\ \frac{3,5}{5,5} && \mid \tan^{-1} \\ \Longleftrightarrow && \alpha =&\ \tan^{-1}\left(\frac{3,5}{5,5}\right) \\ \Longleftrightarrow && \alpha =&\ 32,47° \end{aligned}$$

b) Wie lang sind die Dachsparren? In dem Dreieck wird die Hypotenuse gesucht:

$$\begin{aligned} && \sin(32,47°) =&\ \frac{3,5}{s} && \mid * s \\ \Longleftrightarrow && s * \sin(32,47°) =&\ 3,5 && \mid : \sin(32,47°) \\ \Longleftrightarrow && s =&\ \frac{3,5}{\sin(32,47°)} \\ \Longleftrightarrow && s =&\ 6,52 \end{aligned}$$

6. Wir zeichnen die Höhe der Leiter durch den Scheitelpunkt ein, damit wir ein rechtwinkliges Dreieck haben. Diese Höhe ist gesucht. Wir kennen in dem so entstandenen Dreieck den Winkel von 25° an der Spitze und die Hypotenuse (3 Meter).

a) Wir suchen zuerst die Ankathete zu dem Winkel:

$$\begin{aligned} && \cos(25°) =&\ \frac{h}{3} && \mid * 3 \\ \Longleftrightarrow && =&\ h3 * \cos(25°) \\ \Longleftrightarrow && h =&\ 2,72 \end{aligned}$$

b) Nun suchen wir die Gegenkathete:

$$\begin{aligned} && \sin(25°) =&\ \frac{B}{3} && \mid * 3 \\ \Longleftrightarrow && =&\ b3 * \sin(25°) \\ \Longleftrightarrow && b =&\ 1,27 \end{aligned}$$

Fußpunkte stehen 2*1,27 Meter = 2,54 Meter auseinander.

a) 15% in Grad umrechnen:

$$\begin{aligned} && \tan(\alpha) =&\ \frac{15}{100} && \mid * \tan^{-1} \\ \Longleftrightarrow && \alpha =&\ \tan^{-1}(0,15) \\ \Longleftrightarrow && \alpha =&\ 8,53° \end{aligned}$$

b) Bei der Frage nach der Entfernung der Garage von der Straße haben wir die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks und den Winkel gegeben. Wir suchen die Ankathete:

$$\begin{aligned} \cos(8,53°) &= \frac{l}{5} && \mid *5 \\ \Longleftrightarrow \quad l &= 5 * \cos(8,53°) \\ \Longleftrightarrow \quad s &= 4,94 \end{aligned}$$

c) Bei der Frage nach der Länge der zufahrt ist die Hypotenuse gesucht und die Ankathete gegeben:

$$\begin{aligned} \cos(8,53°) &= \frac{5}{l} && \mid *l \\ \Longleftrightarrow \quad l * \cos(8,53°) &= 3,5 && \mid : \cos(32,47°) \\ \Longleftrightarrow \quad l &= \frac{5}{\cos(8,53°)} \\ \Longleftrightarrow \quad l &= 5,06 \end{aligned}$$

7. a) Um die obere Kante zu berechnen zeichnen wir die Höhe des Trapezes beispielsweise in I ein. Damit entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Winkel $\beta = 35°$ bei I. In diesem Dreieck suchen wir die Gegenkathete und kennen die Ankathete:

$$\begin{aligned} \tan(35°) &= \frac{x}{2} && \mid *2 \\ \Longleftrightarrow \quad &= x2 * \tan(35°) \\ \Longleftrightarrow \quad x &= 1,40 \end{aligned}$$

Als Gesamtbreite des Kanals ergibt sich somit 2,50 Meter + 2*1,40 Meter - 5,30 Meter.

b) Wenn der Kanal nur bis zu einem Meter mit Wasser gefüllt ist, beträgt die obere Breite nicht mehr 5,30 Meter. Der Rechenweg ist der gleiche wie gerade:

$$\begin{aligned} \tan(35°) &= \frac{x}{1} && \mid *1 \\ \Longleftrightarrow \quad &= x1 * \tan(35°) \\ \Longleftrightarrow \quad x &= 0,70 \end{aligned}$$

Somit beträgt die Breite 2,50 Meter + 2*0,70 Meter = 3,90 Meter. Somit ergibt sich für die Fläche des Trapezes $G = \frac{2,50+3,90}{2} * 1 = 3,2$. Multipliziert man diese Fläche mit der Länge des Kanals, so ergibt sich das Volumen als $3,2 * 20 = 64$. Diese 64 m^3 sind 64.000 Liter.

8. In dem rechtwinkligen Dreieck haben wir die Ankathete zu α gegeben und suchen die Gegenkathete:

$$\begin{aligned} & \tan(10°) = & \frac{b}{300} & \quad \mid * 300 \\ \iff & = & b300 * \tan(10°) & \\ \iff & b = & 52,90 & \end{aligned}$$