# 1 Pyramide, Kegel und Kugel

Pyramide und Kegel sind beides Körper, die - anders als Prismen und Zylinder - spitz zulaufen. Während das Volumen von Prismen mit $V = G * h_k$ berechnet wird, wobei $G$ die Grundfläche ist und $h_k$ die Körperhöhe berechnet wir das Volumen von Pyramide und Kegel mit der Formel

$$V = \frac{1}{3} * G * h_k.$$

Eine Pyramide oder ein Kegel mit gleicher Grundfläche und Körperhöhe wie der entsprechende Zylinder hat also nur ein Drittel des Volumens. Wie die Grundfläche berechnet wird, hängt ihrer jeweiligen Form ab. Wir werden uns bei den Pyramiden auf quadratische Grundflächen ebschränken. Dort gilt $G = a^2$. Bei Kegeln ist die Fläche $G = \pi * r^2$, weil die Grundfläche ein Kreis ist. Die Oberfläche berechnet man mit Hilfe der Formel $O = G + M$, wobei $M$ der Mantel ist. Noch mehr als die Berechnung des Volumens hängt die Berechnung des Mantels davon ab, welche Form die Grundfläche $G$ hat.

## 1.1 Pyramide

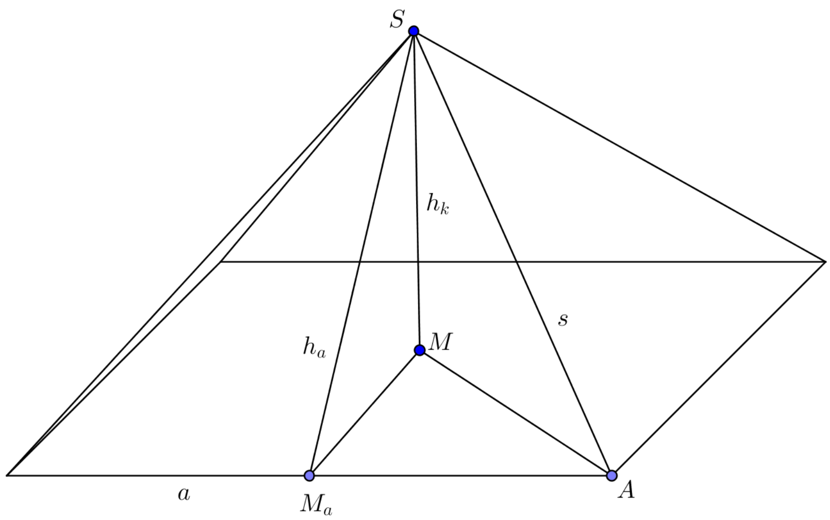


Abbildung 1: Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche

Die Oberfläche einer quadratischen Pyramide besten aus der Grundfläche $G = a^2$ und vier gleich großen Dreiecken mit der Fläche $\frac{a*h_a}{2}$. Diese vier Dreiecke sind der Mantel. Insgesamt ergibt sich somit bei einer quadratischen Pyramide

$$M = G + 2 * a * h_a.$$

Aufgaben im Bereich der Pyramiden beinhalten oft, Volumen, Mantel und/oder Oberfläche aus vorgegebenen Teilen, z. B. aus der Mantellinie $s$ und der Höhe der Pyramide $h_k$ zu berechnen. Dazu muss man die anderen Größen mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen[1] Dazu muss man in der Pyramide rechtwinklige Dreiecke suchen. Es gibt davon vier Stück. Diese wollen wir uns im folgenden anschauen: In der Abbildung

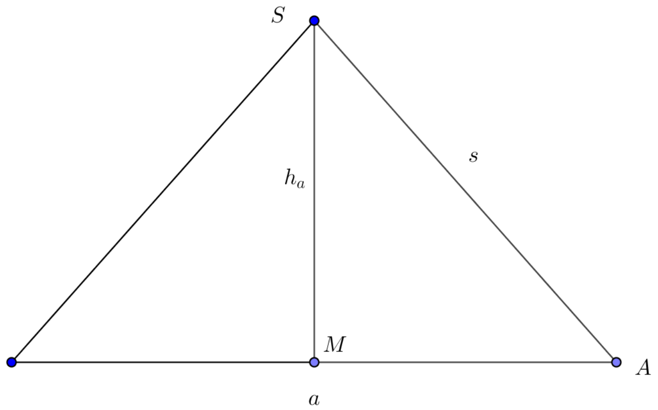


Abbildung 2: Pyramide: Vorderansicht einer Dreiecksseite

2 schauen wir von vorne auf eine der Dreiecksseiten der Pyramide. Da die Pyramide symmetrisch ist - die Spitze $S$ liegt senkrecht über dem Mittelpunkt $M$ der Grundfläche - ist das Dreieck gleichschenklig. Damit teilt die Höhe $h_a$ die Seite $a$ in zwei gleich große Teile. In diesem Dreieck gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2.$$

Das Dreieck in Abbildung 3 entsteht durch einen geraden Schnitt von oben parallel zu einer der Grundkanten durch die Pyramide. In der Abbildung 3 ist nur eine Hälfte der Pyramide dargestellt. In diesem Dreieck gilt

$$h_k^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_a^2.$$

Für das letzte Dreieck der Pyramide benötigen wir die Diagonale der Grundfläche $e$. Diese finden wir in der Abbildung 4. Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} & a^2 + a^2 &=& \quad e^2 \\ \iff & 2a^2 &=& \quad e^2 \quad |\sqrt{} \\ \iff & e &=& \sqrt{2} * a \end{aligned}$$

[1] Der Satz des Pythagoras besagt, dass die Summe der Kathetenquadrate eines rechtwinkligen Dreiecks gleich dem Hypotenusenquadrat ist: $a^2 + b^2 = c^2$, wenn $\gamma$ der rechte Winkel ist.

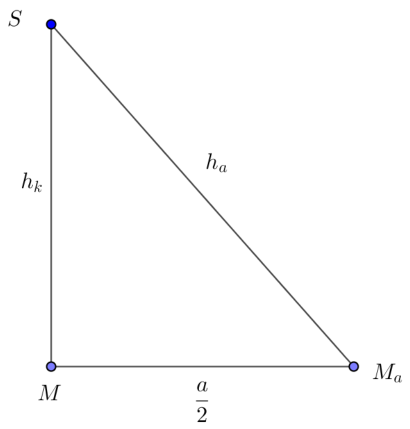


Abbildung 3: Senkrechter Schnitt durch die Pyramide

Das dritte Dreieck, dass wir in einer Pyramide benutzen können, entsteht, wenn wir die Pyramide von oben entlang einer der Diagonalen der Grundfläche durchschneiden, wie dies in Abbildung 5 geschehen ist. In diesem Dreieck gilt

$$h_k^2 + \left(\frac{e}{2}\right) = s^2.$$

## 1.2 Der Kegel

Der Kegel ähnelt der Pyramide insofern, weil auch er spitz zuläuft. Seine Grundfläche ist ein Kreis. Das Volumen $V = G * h_k$ wird konkret mit

$$V = \pi * r^2 * h_k$$

berechnet und die Oberfläche mit

$$\begin{aligned} O &= G + M \\ &= \pi * r^2 + \ * r * s \\ &= \pi * r * (r + s) \end{aligned}$$

In einem Kegel gibt es drei Variablen, die zudem noch über den Satz des Pythagoras miteinander verbunden sind:

- den Radius $r$,
- die Körperhöhe $h_k$ und
- die Mantellinie $s$.

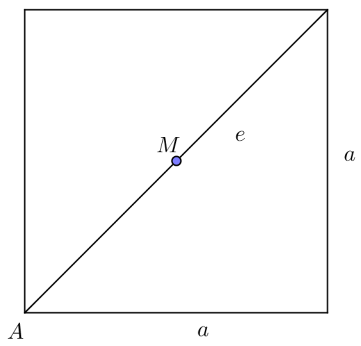


Abbildung 4: Die Grundfläche

In der Abbildung 6 ist ein senkrechter Schnitt von oben durch einen Kegel ausgeführt worden; gleichzeitig ist von dem dadurch entstandenen gleichseitige Dreieck nur eine Hälfte dargestellt worden. In diesem rechtwinkligen Dreieck gilt

$$h_k^2 + r^2 = s^2.$$

## 1.3 Kugel

Eine Kugel hat nur eine Variable: den Radius $r$. Wie beim Kreis ist der Durchmesser das Doppelte des Radius: $d = 2 * r$. Für Volumen und Oberfläche gelten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi * r^3 \\ O &= 4\pi * r^2 \\ &= \pi * d^2 \end{aligned}$$

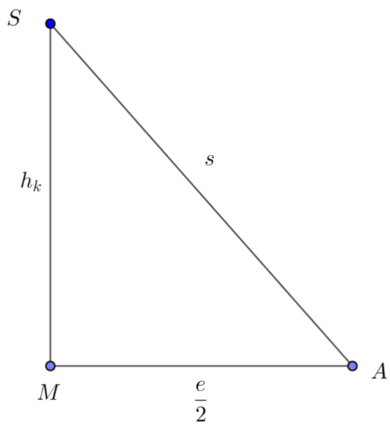


Abbildung 5: Schräger Schnitt durch die Pyramide

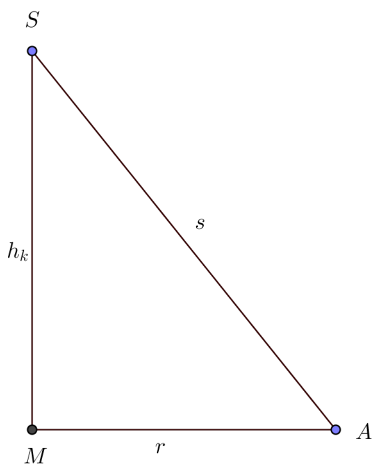


Abbildung 6: Der Schnitt durch einen Kegel