

1 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen sind solche Gleichungen, die nur Variablen mit „1“ als höchstem Exponenten haben. Ziel der Umformungen ist es, die Variable am Ende auf einer Seite alleine stehen zu haben. Dabei müssen wir Rechengesetze, wie etwa die Reihenfolge beachten.

1.1 Das Lösen linearer Gleichungen

Bei der Lösung von Gleichungen gehen wir wie folgt vor:

1. Klammern auflösen
2. Zusammenfassen auf den beiden Seiten der Gleichung
3. Die Variablen auf der einen Seite sammeln, die Zahlen auf der anderen. Dies geschieht durch addieren und/oder subtrahieren von Termen
4. Nun wird durch die Zahl, die vor der Variablen steht, dividiert

Schauen wir uns ein Beispiel an: Wir wollen die Gleichung

$$5x + 4 = 2(x + 5)$$

lösen. Der erste Schritt ist das Auflösen der Klammer auf der rechten Seite:

$$5x + 4 = 2x + 10.$$

Nun sortieren wir: Die Zahlen kommen nach rechts und die Variablen nach links. Dazu wird auf beiden Seiten der Gleichung die 4 subtrahiert, da sie momentan auf der rechten Seite addiert wird. Um einen Term von einer Seite auf die andere zu bekommen, machen wir also immer das Gegenteil von der Rechnung, mit dem der Term in der Gleichung steht. Bei einer Addition (wie hier) subtrahieren wir, bei einer Subtraktion addieren wir; bei einer Multiplikation dividieren wir und bei einer Division multiplizieren wir.

$$\begin{aligned} & 5x + 4 = 2x + 10 && | - 4 \\ \Leftrightarrow & 5x + 4 - 4 = 2x + 10 - 4 \\ \Leftrightarrow & 5x = 2x + 6 && | - 2x \\ \Leftrightarrow & 5x - 2x = 2x + 6 - 2x \\ \Leftrightarrow & 3x = 6 && | : 3 \\ \Leftrightarrow & 3x : 3 = 6 : 3 \\ \Leftrightarrow & x = 2 \end{aligned}$$

Zwei Erläuterungen zur Schreibweise:

- Der Doppelpfeil \Leftrightarrow heißt Äquivalenzpfeil. Er bedeutet, dass die Gleichung, die vor ihm steht und die Gleichung, die hinter ihm steht, die gleiche Lösung haben.

Lineare Gleichungen

- Der senkrechte Strich |, der am Ende mancher Zeilen auftaucht, bedeutet, dass dort eine Anweisung steht, die auf beide Seiten der Gleichung angewendet werden soll. Wenn diese Anweisungen ausgeführt werden, nennen wir dies eine Äquivalenzumformung.

Wenn wir Gleichungen auflösen, müssen wir nicht immer so ausführlich schreiben, wie wir das gerade getan haben. Schauen wir uns dazu ein anderes Beispiel an:

$$\begin{aligned} 2c - 4 &= 1,5c + 10 && | + 4 \\ \Leftrightarrow 2c &= 1,5c + 14 && | - 1,5c \\ \Leftrightarrow 0,5c &= 14 && | : 0,5 \\ \Leftrightarrow c &= 28 \end{aligned}$$

Das Ziel beim Auflösen von linearen Gleichungen ist immer das Gleiche: Wir wollen die Variable alleine stehen haben. Dazu müssen wir zuerst Klammern auflösen, anschließend durch Subtrahieren und Addieren sortieren und zum Schluss dividieren.

1.2 Besondere Ergebnisse

Beim Auflösen von Gleichungen kann es dazu kommen, dass wir die Variable nicht übrig behalten, sondern dass sie bei einer Äquivalenzumformung komplett aus der Gleichung entfernt wird. Dann kommt es darauf an, was im Ergebnis stehen bleibt.

- Erhalten wir eine wahre Aussage, wie etwa $3 = 3$ oder $7 = 7$, haben wir unendliche viele Lösungen: Für die Variable kann jede beliebige Zahl eingesetzt werden, die Gleichung ist immer erfüllt.
- Erhalten wir eine unwahre Aussage - stehen also auf den beiden Seiten der Gleichung unterschiedliche Zahlen - ist die Gleichung unlösbar: Egal welche Zahl wir für die Variable einsetzen, es gibt immer ein unwahres Ergebnis.

1.3 Die Probe

Probe bedeutet, dass wir in der ursprünglichen Gleichung den für die Variable errechneten Wert einsetzen und überprüfen, ob das Ergebnis richtig ist. Nehmen wir als Beispiel die erste Gleichung, bei der wir $x = 2$ als Ergebnis bekommen haben. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} 5 * 2 + 4 &= 2 * 2 + 10 \\ \Leftrightarrow 14 &= 14 \end{aligned}$$

Wir haben richtig gerechnet.