

Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen 2

Lösen Sie die folgenden Linearen Gleichungssysteme. Führen Sie die Probe durch.

1.

$$\text{I} \quad 6x + 4y + 3z = 8$$

$$\text{II} \quad 2x + 8y - z = 16$$

$$\text{III} \quad 3x + 5y + 3z = 10$$

2.

$$\text{I} \quad x + y + z = -6$$

$$\text{II} \quad -2x + y + z = 0$$

$$\text{III} \quad 5x - 6y - z = -1$$

3.

$$\text{I} \quad 2x + 4y - z = 28$$

$$\text{II} \quad 3x - 4y + 3z = -25$$

$$\text{III} \quad 4x + y + 2z = 4$$

4.

$$\text{I} \quad 2x + 3y - 4z = 1$$

$$\text{II} \quad 6x - 2y - 5z = -1$$

$$\text{III} \quad 8x - 4y + 3z = 7$$

Lösungen: (1; 1; 1), (0; 2; 0), (-2; -1; -3), (3; 4; -6)

Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen 2

1.

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 6x + 4y + 3z = 8 \\ \text{II} \quad 2x + 8y - z = 16 \quad | * 3 \\ \text{III} \quad 3x + 5y + 3z = 10 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 6x + 4y + 3z = 8 \quad I + II \\ \text{II} \quad 6x + 24y - 3z = 48 \\ \text{III} \quad 3x + 5y + 3z = 10 \quad III + II \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 12x + 28y = 56 \quad | * 3 \\ \text{II} \quad 6x + 24y - 3z = 48 \\ \text{III} \quad 9x + 29y = 58 \quad | * 4 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 36x + 84y = 168 \\ \text{II} \quad 6x + 24y - 3z = 48 \\ \text{III} \quad 36x + 116y = 232 \quad | III - I \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 36x + 84y = 168 \\ \text{II} \quad 6x + 24y - 3z = 48 \\ \text{III} \quad 36x + 116y = 232 \quad | III - I \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 36x + 84y = 168 \\ \text{II} \quad 6x + 24y - 3z = 48 \\ \text{III} \quad 32y = 64 \end{array}$$

Aus Gleichung III folgt $y = 2$. Einsetzen in Gleichung I liefert $36x + 168 = 169$ und damit $x=0$. Einsetzen von $y = 2$ und $x = 0$ in Gleichung II ergibt $48 - 3z = 48$ und damit $z = 0$.

Probe:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 6 * 0 + 4 * 2 + 3 * 0 = 8 \\ \text{II} \quad 2 * 0 + 8y - 0 = 16 \\ \text{III} \quad 3 * 0 + 5 * 2 + 3 * 0 = 10 \end{array}$$

$$\mathbb{L} = \{(0; 2; 0)\}$$

2.

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x + y + z = -6 \quad | I + III \\ \text{II} \quad -2x + y + z = 0 \quad | II + III \\ \text{III} \quad 5x - 6y - z = -1 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 6x + -5y = -7 \\ \text{II} \quad 3x - 5y = -1 \quad II - I \\ \text{III} \quad 5x - 6y - z = -1 \end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen 2

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 6x + -5y = -7 \\ \text{II} \quad -3x = 6 \\ \text{III} \quad 5x - 6y - z = -1 \end{array}$$

Aus Gleichung II folgt $x = -2$. Einsetzen in Gleichung I ergibt $-12 + 5y = -7$ und nach Umformen $y = 1$. $x = -2$ und $y = -1$ eingesetzt in Gleichung III ergibt $-10 + 6 - z = -1$. Umformen liefert $z = -3$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad -2 - 1 - 3 = -6 \quad |I + III \\ \text{II} \quad -2 * (-2) - 1 - 3 = 0 \quad |II + III \\ \text{III} \quad 5 * (-2) - 6 * (-1) + 3 = -1 \end{array}$$

$$\mathbb{L} = \{(-2; -1; -3)\}$$

3.

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 2x + 4y - z = 28 \\ \text{II} \quad 3x - 4y + 3z = -25 \\ \text{III} \quad 4x + y + 2z = 4 \quad |*4 \\ \text{I} \quad 2x + 4y - z = 28 \quad |I + II \\ \text{II} \quad 3x - 4y + 3z = -25 \\ \text{III} \quad 16x + 4y + 8z = 16 \quad |III + II \\ \text{I} \quad 5x + 2z = 3 \quad |*11 \\ \text{II} \quad 3x - 4y + 3z = -25 \\ \text{III} \quad 19x + 11z = -9 \quad |*2 \\ \text{I} \quad 55x + 22z = 33 \\ \text{II} \quad 3x - 4y + 3z = -25 \\ \text{III} \quad 38x + 22z = -18 \quad |III - I \\ \text{I} \quad 55x + 22z = 33 \\ \text{II} \quad 3x - 4y + 3z = -25 \\ \text{III} \quad 17x = 51 \end{array}$$

Aus Gleichung III ergibt sich $x = 3$. Damit folgt für Gleichung I $165 + 22z = 33$ und nach Umformung $z = -6$. Einsetzen von $x = 3$ und $z = -6$ in Gleichung II ergibt $9 - 4y - 18 = -25$. Umstellen $y = 4$.

Probe:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 2 * 3 + 4 * 4 + 6 = 28 \\ \text{II} \quad 3 * 3 - 4 * 4 + 3 * (-6) = -25 \\ \text{III} \quad 4 * 3 + 4 + 2 * (-6) = 4 \end{array}$$

Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen 2

$$\mathbb{L} = \{(3; 4; -6)\}$$

4.

$$\text{I} \quad 2x + 3y - 4z = 1 \quad | * 4$$

$$\text{II} \quad 6x - 2y - 5z = -1 \quad | * 6$$

$$\text{III} \quad 8x - 4y + 3z = 7 \quad | * 3$$

$$\text{I} \quad 8x + 12y - 16z = 4$$

$$\text{II} \quad 36x - 12y - 30z = -6 \quad | II + I$$

$$\text{III} \quad 24x - 12y + 9z = 21 \quad | III + I$$

$$\text{I} \quad 8x + 12y - 16z = 4$$

$$\text{II} \quad 44x - 46z = -2 \quad | * 7$$

$$\text{III} \quad 32x - 7z = 25 \quad | * 46$$

$$\text{I} \quad 8x + 12y - 16z = 4$$

$$\text{II} \quad 308x - 332z = -14$$

$$\text{III} \quad 1472x - 332z = 1150 \quad | III - I$$

$$\text{I} \quad 8x + 12y - 16z = 4$$

$$\text{II} \quad 308x - 332z = -14$$

$$\text{III} \quad 1164x = 1164$$

Aus Gleichung III folgt $x = 1$ mit $x = 1$ folgt aus Gleichung II $308 - 332z = -14$ und nach Umstellen $z = 1$. $x = 1$ und $z = 1$ ergeben in Gleichung I $8 + 12y - 16 = 4$ und damit $y = 1$.

Probe

$$\text{I} \quad 2 * 1 + 3 * 1 - 4 * 1 = 1$$

$$\text{II} \quad 6 * 1 - 2 * 1 - 5 * 1 = -1$$

$$\text{III} \quad 8 * 1 - 4 * 1 + 3 * 1 = 7$$

$$\mathbb{L} = \{(1; 1; 1)\}$$