

## Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen 1

Lösen Sie die folgenden Linearen Gleichungssysteme. Führen Sie die Probe durch.

1.

$$\text{I} \quad 2x - 4y + 2z = 0$$

$$\text{II} \quad 4x - 2y = 0$$

$$\text{III} \quad x + y + z = 12$$

2.

$$\text{I} \quad x + 2y + 3z = 2$$

$$\text{II} \quad 2x - 4y - 4z = 36$$

$$\text{III} \quad 3x + 7y + 2z = 2$$

3.

$$\text{I} \quad x + y + z = 2$$

$$\text{II} \quad 2x + 6y + z = 6$$

$$\text{III} \quad 4x + 2y + z = 0$$

4.

$$\text{I} \quad -2x - y + z = 3$$

$$\text{II} \quad 3x - 2y + 4z = 26$$

$$\text{III} \quad 5x + 2y - z = -1$$

Lösungen:  $(-1; 1; 2)$ ,  $(2; 4; 6)$ ,  $(2; -4; 3)$ ,  $(10; -4; 0)$ ,

## Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen 1

1.

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 2x - 4y + 2z = 0 \\ \text{II} \quad 4x - 2y = 0 \\ \text{III} \quad x + y + z = 12 \quad | * 2 \\ \\ \text{I} \quad 2x - 4y + 2z = 0 \\ \text{II} \quad 4x - 2y = 0 \\ \text{III} \quad 2x + 2y + 2z = 24 \quad III - I \\ \\ \text{I} \quad 2x - 4y + 2z = 0 \\ \text{II} \quad 4x - 2y = 0 \\ \text{III} \quad 6y = 24 \end{array}$$

Nun können wir aus Gleichung III  $y$  bestimmen. Aus  $6y = 24$  folgt nach Division durch 6:  $y = 4$ . Dieses können wir in Gleichung II verwenden:

$$\begin{array}{l} 4x - 2 * 4 = 0 \quad | + 8 \\ 4x = 8 \quad | : 4 \\ x = 2 \end{array}$$

Mit  $x = 2$  und  $y = 4$  können wir nun  $z$  bestimmen, beispielsweise aus Gleichung I:

$$\begin{array}{l} 2 * 2 - 4 * 4 + 2z = 0 \\ -12 + 2z = 0 \quad | + 12 \\ 2z = 12 \quad | : 2 \\ z = 6 \end{array}$$

Probe: Einsetzen in die drei Gleichungen ergibt wahre Aussagen:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 2 * 2 - 4 * 4 + 2 * 6 = 0 \\ \text{II} \quad 4 * 2 - 2 * 4 = 0 \\ \text{III} \quad 2 + 4 + 6 = 12 \quad | * 2 \end{array}$$

$$\mathbb{L} = \{(2; 4; 6)\}$$

2.

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x + 2y + 3z = 2 \quad | * 6 \\ \text{II} \quad 2x - 4y - 4z = 36 \quad | * 3 \\ \text{III} \quad 3x + 7y + 2z = 2 \quad | * 2 \\ \\ \text{I} \quad 6x + 12y + 18z = 12 \\ \text{II} \quad 6x - 12y - 12z = 108 \quad | II - I \\ \text{III} \quad 6x + 14y + 4z = 4 \quad | III - I \end{array}$$

## Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen 1

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 6x + 12y + 18z = 12 \\ \text{II} \quad -24y - 30z = 96 \quad | : 6 \\ \text{III} \quad 2y - 8z = -8 \quad | * 2 \\ \\ \text{I} \quad 6x + 12y + 18z = 12 \\ \text{II} \quad -4y - 5z = 16 \\ \text{III} \quad 4y - 16z = -16 \quad | III + II \\ \\ \text{I} \quad 6x + 12y + 18z = 12 \\ \text{II} \quad -4y - 5z = 16 \\ \text{III} \quad -21z = 0 \end{array}$$

Aus Gleichung III folgt  $z = 0$ . Dies können wir in Gleichung II einsetzen und erhalten  $-4y = 16$  und damit  $y = -4$ . Setzen wir  $y = -4$  und  $z = 0$  in die Gleichung I ein, so erhalten wir  $x + 2 * (-4) = 2$  und damit  $x = 10$ .

Die Probe:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 10 + 2 * (-4) + 30 = 2 \\ \text{II} \quad 2 * 10 - 4(-4) - 4 * 0 = 36 \\ \text{III} \quad 3 * 10 + 7 * (-4) + 2 * 0 = 2 \end{array}$$

$$\mathbb{L} = \{(10; -4; 0)\}$$

3.

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x + y + z = 2 \\ \text{II} \quad 2x + 6y + z = 6 \quad | II - I \\ \text{III} \quad 4x + 2y + z = 0 \quad | III - I \\ \\ \text{I} \quad x + y + z = 2 \\ \text{II} \quad x + 5y = 4 \quad | * 3 \\ \text{III} \quad 3x + y = -2 \\ \\ \text{I} \quad x + y + z = 2 \\ \text{II} \quad 3x + 15y = 12 \\ \text{III} \quad 3x + y = -2 \quad | III - II \\ \\ \text{I} \quad x + y + z = 2 \\ \text{II} \quad 3x + 15y = 12 \\ \text{III} \quad 14y = 14 \end{array}$$

Aus Gleichung III folgt  $y = 1$ . Somit erhalten wir aus Gleichung II:  $3x + 15 = 12$  und somit  $x = -1$ . Einsetzen in Gleichung I liefert  $-1 + 1 + z = 2$  und damit  $z = 2$ .

## Lineare Gleichungssysteme mit 3 Variablen 1

Probe:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 1 - 1 + 2 = 2 \\ \text{II} \quad -2 + 6 + 2 = 6 \quad |II - I \\ \text{III} \quad -4 + 2 + 2 = 0 \quad |III - I \end{array}$$

$$\mathbb{L} = \{(-1; 1; 2)\}$$

4.

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad -2x - y + z = 3 \quad | * 2 \\ \text{II} \quad 3x - 2y + 4z = 26 \\ \text{III} \quad 5x + 2y - z = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad -4x - 2y + 2z = 6 \quad |I + III \\ \text{II} \quad 3x - 2y + 4z = 26 \quad |II + III \\ \text{III} \quad 5x + 2y - z = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x + z = 5 \quad | * 3 \\ \text{II} \quad 8x + 3z = 25 \\ \text{III} \quad 5x + 2y - z = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 3x + 3z = 15 \\ \text{II} \quad 8x + 3z = 25 \quad II - I \\ \text{III} \quad 5x + 2y - z = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad 3x + 3z = 15 \\ \text{II} \quad 5x = 10 \quad II - I \\ \text{III} \quad 5x + 2y - z = -1 \end{array}$$

Aus Gleichung II folgt nach Division durch 5:  $x = 2$ . Aus Gleichung I ergibt sich damit  $6 + 3z = 15$  und nach Umstellen  $z = 3$ . Einsetzen beider Werte in Gleichung III führt zu  $10 + 2y - 3 = -1$  und nach Umstellen zu  $y = -4$ .

Probe:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad -2 * 2 - (-4) + 3 = 3 \\ \text{II} \quad 3 * 2 - 2 * (-4) + 4 * 3 = 26 \\ \text{III} \quad 5 * 2 + 2 * (-4) - 3 = -1 \end{array}$$

$$\mathbb{L} = \{(2; -4; 3)\}$$