

Bedingte Wahrscheinlichkeiten 1

1. Vor Ihnen befinden sich zwei Urnen, die Sie äußerlich nicht unterscheiden können. In Urne 1 sind 6 schwarze und 4 weiße Kugeln, in Urne 2 sind 2 schwarze und 8 weiße Kugeln. Sie ziehen blind eine Kugel aus einer der beiden Urnen. Die Kugel ist weiß. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus Urne 1?
2. Die Schülerinnen und Schüler einer Schule kommen mit dem Bus oder zu Fuß zur Schule. Es ist folgende Verteilung bekannt:

	Bus	zu Fuß	gesamt
Schülerinnen	16%	37%	53%
Schüler	26%	21%	47%
gesamt	42%	58%	100%

- a) Zeichnen Sie die beiden Baumdiagramme, die zu dieser Vierfeldertafel gehören.
 - b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit
 - i. für eine Person, die eine Schülerin ist und zu Fuß kommt,
 - ii. für eine Person, der/die mit dem Bus kommt,
 - iii. für eine Schülerin, dass sie mit dem Bus kommt,
 - iv. für einen Schüler, dass er zu Fuß kommt,
 - v. dass jemand, der mit dem Bus kommt, eine Schülerin ist,
 - vi. dass jemand, der zu Fuß kommt, ein Schüler ist?
3. Um zu erkennen, ob jemand an einer Krankheit erkrankt ist, gibt es Schnelltests. Diese Tests haben in der Regel eine Ungenauigkeit, das bedeutet, dass es insgesamt vier mögliche Ergebnisse bei dem Test gibt
 - Die Person ist gesund, der Test zeigt gesund an.
 - Die Person ist gesund, der Test zeigt krank an.
 - Die Person ist krank, der Test zeigt gesund an.
 - Die Person ist krank, der Test zeigt krank an.

Im ersten und vierten Fall stimmen Test und Zustand der Person überein, im zweiten und dritten Fall trifft der Test eine falsche Aussage. Angenommen, 99% der Bevölkerung eines Landes ist gesund. Der Test zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% einen gesunden Menschen als gesund und mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% einen kranken Menschen als krank an.

- a) Erstellen Sie eine Vierfeldertafel, die die Informationen darstellt. Vorlage:

	Person gesund	Person krank	gesamt
Test: gesund			
Test: krank			
gesamt			100%

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt der Test eine Erkrankung an?
- c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person wirklich erkrankt ist, wenn der Test eine Erkrankung anzeigt?

Bedingte Wahrscheinlichkeiten 1

4. Ein TÜV-Prüfer stellt fest, dass 15% aller vorgeführten PKW so schwere Mängel haben, dass sie keine TÜV-Plakette bekommen. 70% dieser PKW sind 7 Jahre oder älter. 25% der PKW bekamen die Plakette, obwohl sie 7 Jahre oder älter waren.
- Wie viel Prozent der PKW sind 7 Jahre oder älter?
 - Welcher Anteil der PKW sind jünger als 7 Jahre und bekommen eine TÜV-Plakette?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt ein PKW, der 7 Jahre oder älter ist, die Plakette nicht?
5. Es gebe drei Hersteller von Festplatten für PCs. Hersteller A hat 35% Marktanteil, B 20% und C 45%. Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit sind die produzierten Festplatten defekt und zwar bei A mit 3%, bei B mit 2% und bei C mit 5%.
- a) Berechnen Sie den Gesamtanteil der defekten Platten.
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Platte defekt ist und von
- Hersteller A,
 - Hersteller B,
 - Hersteller C
- stammt.
- c) Wir haben eine defekte Festplatte gekauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie von
- Hersteller A,
 - Hersteller B,
 - Hersteller C?
- (Andere mögliche Formulierung: Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt eine defekte Platte von Hersteller A, B, C?)

Bedingte Wahrscheinlichkeiten 1

1. Es gibt insgesamt 12 weiße Kugeln. Davon sind 4 in Urne 1. Die Wahrscheinlichkeit ist daher $P_{wei}(Urne1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 33, \overline{3}\%$.
2. a) Der eine Baum: und der andere Baum

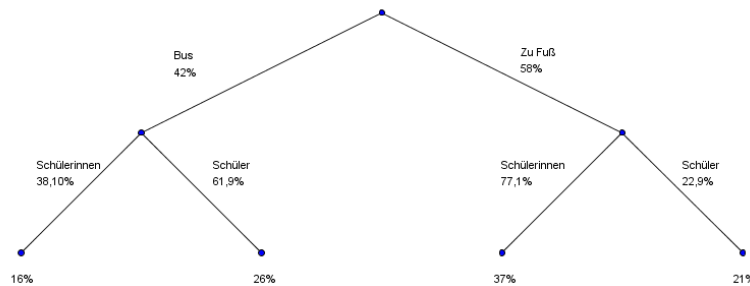


Abbildung 1: Bumdiagramm, 1. Variante

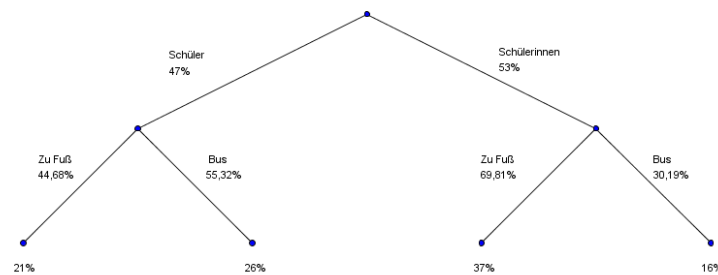


Abbildung 2: Baumdiagramm, 2. Variante

- b) Die Wahrscheinlichkeiten sind:

- i. 37%
- ii. 42%
- iii. $\frac{16\%}{53\%} = 30,19\%$
- iv. $\frac{21\%}{47\%} = 44,86\%$
- v. $\frac{16\%}{42\%} = 38,10\%$
- vi. $\frac{21\%}{58\%} = 36,20\%$

3. a) Vierfeldertafel

	Person gesund	Person krank	gesamt
Test: gesund	$99\% \cdot 95\% = 94,05\%$	$1\% \cdot 2\% = 0,02\%$	94,07%
Test: krank	$99\% \cdot 0,05\% = 4,95\%$	$1\% \cdot 98\% = 0,98\%$	5,93%
gesamt	99%	1%	100%

- b) Der Test zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 5,93% eine Erkrankung an - also fast 6-mal so viele, wie es wirklich Erkrankungen gibt.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten 1

- c) $\frac{0,98\%}{5,93\%} = 16,5\%$. Die Wahrscheinlichkeit, nach einem positiven Test erkrankt zu sein, ist relativ gering.

4. Die zugehörige Vierfeldertafel:

	jünger als 7 Jahre	älter als 7 Jahre	gesamt
TÜV	60%	25%	85%
kein TÜV	4,5%	10,5%	15%
gesamt	64,5%	35,5%	100%

Wie berechnet man die Werte? Wir wissen, dass 15% der PKW die TÜV-Plakette nicht bekommen (85% bekommen sie damit). 70% der PKW ohne Plakette sind 7 Jahre oder älter. Das sind insgesamt $15\% \cdot 70\% = 10,5\%$. Somit sind $15\% - 10,5\% = 4,5\%$ der Wagen, die keine Plakette bekommen, jünger als 7 Jahre. Aus dem Text wissen wir, dass 25% der PKW eine Plakette erhalten und 7 Jahre oder älter sind. Somit sind $85\% - 25\% = 60\%$ der PKW jünger als 7 Jahre und erhalten eine Plakette.

- a) 35,5% der PKW sind 7 Jahre oder älter (Dritte Spalte der Tabelle).
b) 60%
c) Bedingung: PKW ist älter als 7 Jahre: 35,5%. Wahrscheinlichkeit für 7 Jahre oder älter und kein TÜV: 10,5%, also $P_{\text{PKW älter als 7 Jahre}}^{\text{(Keine TÜV-Plakette)}} = \frac{10,5\%}{35,5\%} = 29,6\%$.

5. Festplatten

- Der Anteil der defekten Platten ist $0,35 \cdot 0,03 + 0,2 \cdot 0,02 + 0,45 \cdot 0,05 = 0,037 = 3,7\%$.
- Eine Festplatte ist defekt und stammt von
 - Hersteller A mit $0,35 \cdot 0,03 = 0,0105 = 1,05\%$
 - Hersteller B mit $0,2 \cdot 0,02 = 0,004 = 0,4\%$
 - Hersteller C mit $0,45 \cdot 0,05 = 0,0225 = 2,25\%$.
- Die bedingten Wahrscheinlichkeiten sind
 - Hersteller A $\frac{0,0105}{0,037} = 0,2837 = 28,38\%$.
 - Hersteller B $\frac{0,004}{0,037} = 0,108 = 10,81\%$.
 - Hersteller C $\frac{0,0225}{0,037} = 0,6081 = 60,82\%$.